

УДК 539.1.01

12 Развитие стохастической интерпретации квантовой механики Э. Нельсона. Вывод уравнений Шредингера-Эйлера-Пуассона

Михаил Батанов-Гаухман

к.т.н., доцент каф. 207 Института № 2 “Авиационные и ракетные двигатели и энергетические установки” ФГБОУВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», Волоколамское шоссе, д.4, г. Москва, 125993, alsignat@yandex.ru

ORCID iD [0000-0002-8179-6113](https://orcid.org/0000-0002-8179-6113)

Направлено: 01 ноября 2020

Аннотация: Целью статьи является развитие стохастической интерпретации квантовой механики Э. Нельсона. На основании рассмотрения усредненных состояний хаотически блуждающей частицы получены стационарное и времени-зависимое стохастические уравнения Шредингера-Эйлера-Пуассона (47) и (92), которые с точностью до коэффициентов совпали с соответствующими уравнениями Шредингера. При этом отношение редуцированной постоянной Планка к массе частицы выражается через усредненные характеристики трехмерного случайного процесса, в котором участвует рассматриваемая блуждающая частица. Полученные стохастические уравнения (39), (47), (88), (92) пригодны для описания квантовых явлений и усредненных состояний частиц не только атомного и субатомного масштаба, но и аналогичных стохастических систем микро- и макромира.

Ключевые слова: случайный процесс, уравнение Шредингера, постоянная Планка, вывод уравнения Шредингера, стохастическое уравнение, стохастическая квантовая механика.

PACS numbers:

03.65.-w (Quantum mechanics)

05.30.-d (Quantum statistical mechanics)

Список сокращений и определений

БСКМ – безмассовая стохастическая квантовая механика;

КМ – квантовая механика;

ПМЭ – полная механическая энергетичность;

ПССП – псевдо-стационарным случайный процесс;

СКМ – стохастическая квантовая механика;

ССП – стационарный случайный процесс;

ССПвУС – стационарный случайный процесс;

ФПРВ – функция плотности распределения вероятности;

ХБЧ – хаотически блуждающая частица;

Пико-частица – частица или античастица с характерными размерами $\sim 10^{-10} - 10^{-13}$ см;

Микро-частица – частица с характерными размерами $\sim 10^{-7} - 10^{-3}$ см;

Макро-частица – компактные тела с характерными размерами $\sim 10^{-2} - 10^4$ см;

Мега-частица – планета, ядро звезды и другие космические тела с размерами $\sim 10^5 - 10^9$ см.

Development of a Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics by E. Nelson. Derivation of the Schrödinger-Euler-Poisson Equations

Mikhail Batanov

Ph.D., Associate Professor, Institute No. 2 “Aircraft, rocket engines and power plants”, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education “Moscow Aviation Institute (National Research University)”, Volokolamsk highway 4, Moscow, Russia, E-mail: BatанovMS@mai.ru
(the author is known under the pseudonym M.S. Batanov-Gaukhman, alsignat@yandex.ru
ORCID iD 0000-0002-8179-6113)

Submitted: 01 November 2020

Abstract: The aim of the article is to develop a stochastic interpretation of the quantum mechanics by E. Nelson. Based on the consideration of the averaged states of a chaotically wandering particle, the stationary and time-dependent stochastic Schrödinger-Euler-Poisson equations (47) and (92) were obtained, which coincided with the corresponding Schrödinger equations up to coefficients. In this case, the ratio of the reduced Planck constant to the particle mass is expressed through the averaged characteristics of a three-dimensional random process in which the considered wandering particle participates. The obtained stochastic equations (39), (47), (88), (92) are suitable for describing quantum phenomena and averaged states of particles not only at atomic and subatomic scales, but also similar stochastic systems of the micro- and macroworld.

Keywords: Stochastic process, Schrödinger equation, Planck constant, derivation of the Schrödinger equation. stochastic equation, stochastic quantum mechanics

PACS numbers:

03.65.–w (Quantum mechanics)

05.30.–d (Quantum statistical mechanics)

List of abbreviations and definitions

MSQM is the massless stochastic quantum mechanics;

QM is the quantum mechanics;

FME is the full mechanical energality;

PSRP is the pseudo-stationary random process;

SQM is the stochastic quantum mechanics;

SRP is the stationary random process;

PDF is the probability density function;

ChWP is the chaotically wandering particle;

Pico-particle is a particle or antiparticle with a size of $\sim 10^{-8} - 10^{-13}$ cm;

Micro-particle is a particle with dimensions of $\sim 10^{-7} - 10^{-3}$ cm;

Macro-particle is a compact bodies with dimensions of $\sim 10^{-2} - 10^4$ cm;

Mega-particle is a planet and other cosmic bodies with sizes of $\sim 10^5 - 10^9$ cm.

1 ПРЕДЫСТОРИЯ и ВВЕДЕНИЕ

В современной физике насчитывается несколько десятков интерпретаций квантовой механики (КМ). Каждая из них имеет свои достоинства и недостатки, но ни одна из них точно не определена, т.к. многие исследователи часто вкладывают в одни и те же понятия разные смыслы.

Одна из причин такой ситуации в квантовой физике связана с различным отношением к волновой функции $\Psi(x,t)$.

Большинство специалистов согласны с утверждением М. Борна, что квадрат модуля волновой функции частицы $\Psi(x,t)$ равен функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) нахождения частицы в точке x

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t).$$

Однако следует учитывать, что в общем случае данная ФПРВ является сложной функцией нескольких факторов, связанных с процессом измерения

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t) = f[\rho_p(x,t), \rho_m(x,t), \rho_e(x,t), \rho_d(x,t), \rho_o(x,t)], \quad (1)$$

где

$\rho_p(x,t)$ – ФПРВ, связанная с хаотическим поведением частицы;

$\rho_m(x,t)$ – ФПРВ, связанная с погрешностью метода измерений;

$\rho_e(x,t)$ – ФПРВ, связанная с влиянием внешних воздействий;

$\rho_d(x,t)$ – ФПРВ, связанная с погрешностью средств измерения;

$\rho_o(x,t)$ – ФПРВ, связанная с влиянием оператора.

Примером функциональной зависимости (1) может послужить ФПРВ

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\sigma_{px}^2 + \sigma_{mx}^2 + \sigma_{ex}^2(t) + \sigma_{dx}^2 + \sigma_{ox}^2]}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2[\sigma_{px}^2 + \sigma_{mx}^2 + \sigma_{ex}^2(t) + \sigma_{dx}^2 + \sigma_{ox}^2]}\right\}$$

где

(2)

$$\sigma_{ix}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_i(x) x^2 dx \quad (\text{здесь } i = p, m, d, o); \quad \sigma_{ex}^2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_e(x,t) x^2 dx$$

– дисперсия i -го влияющего фактора на результат измерения.

Все вышеперечисленные факторы, в той или иной мере, присутствуют при измерении физических характеристик частиц любого масштаба. Однако в зависимости от размеров частиц эти факторы влияют по-разному.

Вместе с тем, практически все специалисты, исследующие свойства нерелятивистских *пико-частиц* (т.е. частиц с характерными размерами атомного и субатомного масштаба, $10^{-10} - 10^{-13}$ см), используют один и тот же математический аппарат квантовой механики (КМ). Данный аппарат получил начало в работе Э. Шредингера [1], и рассчитан на прогнозирование возможных конфигураций и эволюций волновых функций $\Psi(x,t)$ одной частицы или ансамбля одинаковых частиц.

Акцентирование внимания на тех или иных факторах, влияющих на процесс измерения, при использовании одного и того же математического аппарата, приводит к развитию различных интерпретаций КМ.

Например, в ряде экспериментов пико-частицы чрезвычайно чувствительны к воздействию на них измерительной системы и наблюдателя. В этом случае волновая функция (1) должна учитывать все влияющие факторы, при этом методология восприятия полученных результатов наиболее соответствует копенгагенской интерпретации КМ Бора - Гейзенберга.

В других экспериментах факторы, мешающие измерению, настолько незначительны, что ими можно пренебречь. Например, о возможных состояниях электрона в атоме водорода мы судим по спектру его излучения. Если абстрагироваться от незначительного расширения спектральных линий, связанного с влиянием различных сопутствующих факторов, то в этом случае ФПРВ (1) приобретает вид

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t) = f[\rho_p(x,t) \rho_e(x,t)].$$

Такая волновая функция характеризует только свойства самого электрона с учетом влияния вакуума, приводящего к лэмбовскому сдвигу спектральных линий.

В этой статье будем придерживаться стохастической интерпретации квантовой механики, наиболее ярко выраженной в работах Эдварда Нельсона (Edward Nelson) [2,3,4], опубликованных в 1966 – 1984 гг.

Помимо Э. Нельсона данное направление восприятия КМ развивали Р. Фюрт (R. Fürth, [5] 1933), И. Феньес (I. Fényes, [6] 1952) и В. Вейзель (W. Weizel, [7] 1953), М. Павон (M. Pavon, [8] 2000). Альтернативная стохастическая интерпретация КМ была разработана Р. Цековым (Rouven Tsekov, [9] 2012).

Стохастическая интерпретация Нельсона связана с логическим построением КМ по аналогии с теорией броуновского движения [точнее процесса Орнштейна - Уленбека (Ornstein - Uhlenbeck)].

В интерпретации Нельсона причина хаотического поведения пико-частицы связана с воздействием на нее флуктуаций вакуума. Коэффициент диффузии такого стохастического процесса оказывается мнимым в силу отсутствия трения и специфики вязкости вакуума. Таким образом, в стохастической интерпретации КМ первичной является не волновая функция $\Psi(x,t)$, а сложные мелкомасштабные искривления пространственно-временного континуума (т.е. «квантовая пена» Уиллера - Бома - Вижье), влияющие на коллоидную пико-частицу.

В этом случае ФПРВ (1) принимает самый простой вид

$$|\Psi(x,t)|^2 = \rho(x,t) = \rho_e(x,t) = \psi(x,t) \psi^*(x,t), \quad (3)$$

так как характеризует только хаотическое поведение бесструктурной частицы, подверженной непрерывному влиянию бурлящей окружающей среды.

Напомним, что стохастические уравнения Ланжевена и Фоккера - Планка описывают броуновское движение без учета структуры частиц и неопределённости, связанной с погрешностями измерений. Однако между броуновскими частицами (с размерами $\sim 10^{-4}$ см) и пико-частицами (с размерами $\sim 10^{-10} - 10^{-13}$ см) имеется принципиальная разница. Броуновские

(коллоидные) частицы можно наблюдать с помощью микроскопа, практически не воздействуя на них, а пико-частицы в принципе невозможно наблюдать непосредственно.

В этой статье максимально упрощенную (точнее не учитывающую погрешности измерений и влияние других частиц) плотность амплитуды вероятности (ПАВ) $\Psi(x,t) = \psi(x,t)$ будем называть «чистой» волновой функцией.

Необходимо отметить, что в большинстве книг и учебников по квантовой механике изначально под ПАВ $\Psi(x,t)$ подразумевается «чистая» волновая функция частицы. Это является одной из причин отсутствия понимания и согласия между теоретиками и экспериментаторами, а также между специалистами, работающими в различных областях квантовой физики. По всей видимости, именно отношение к «чистой» или «нечистой» волновой функции $\Psi(x,t)$ послужило причиной споров между А. Эйнштейном (изучавшим в молодости броуновское движение) и Н. Бором (чьи ранние работы были связаны с объяснением спектра излучения атомов).

Итак, в данной статье под стохастической интерпретацией квантовой механики Эдварда Нельсона подразумевается такой вариант КМ, в которой волновая функция $\psi(x,t)$ характеризует только хаотическое поведение блуждающей частицы под влиянием флуктуаций окружающей среды, без учета погрешностей измерений и влияния оператора. Эта частица (подобно броуновской корпускуле), имеет объем и хаотичную траекторию движения. При этом сама волновая функция (или ПАВ) $\psi(x,t)$ носит статистический характер Макса Борна.

Вместе с тем учитывается, что в рамках стохастической интерпретации КМ Нельсона «чистая» ПАВ $\psi(x,t)$ оказывается своего рода «интеллектуальной вещью в себе». Поскольку о «чистой» волновой функции $\psi(x,t)$ можно узнать только посредством решения стохастических дифференциальных уравнений. Любая попытка выполнить измерение приведет к частичному искажению или полному разрушению исследуемой стохастической системы и к неминуемому изменению ее ПАВ $\psi(x,t)$.

В данной статье предпринята попытка разработки основ безмассовой стохастической квантовой механики (БСКМ), являющейся развитием стохастической квантовой механики (СКМ) Нельсона [2, 3], и предложено решение проблемы измерения «чистых» параметров стохастических квантовых систем.

Рассмотрена вероятностная модель хаотически блуждающей частицы (ХБЧ), которая, подобно пико-частице Э. Нельсона [2], обладает объемом и непрерывной траекторией движения. Но в отличие от СКМ [2] в БСКМ отсутствуют ограничения на размеры исследуемой частицы. На основании этой модели (методом отличным от [2]) выведены стохастические уравнения (39), (47), (89) и (92), являющиеся обобщением уравнений Шредингера.

По мнению автора, основное достоинство стохастических уравнений (39), (47), (89) и (92), полученных в этой статье, заключается в том, что они пригодны для описания усредненных состояний и расчета квантовых параметров ХБЧ любого масштаба.

Другими словами, основы БСКМ, предложенные в данной статье, могут позволить исследовать стохастические процессы не только на атомном и субатомном уровнях организации вещества, но и на макроуровне. Например, можно оценить вероятность проявления квантовых эффектов при усреднении хаотических перемещений сингулярности в ядре галактики и прогнозировать вытекающие из этого последствия.

2 МЕТОД

2.1 Вероятностная модель блуждающей частицы

Рассмотрим частицу, которая под действием множества не связанных между собой силовых факторов (в том числе флуктуирующей окружающей среды) постоянно хаотически блуждает в окрестности условного центра, совмещенного с началом неподвижной системы координат XYZ (рис. 1).

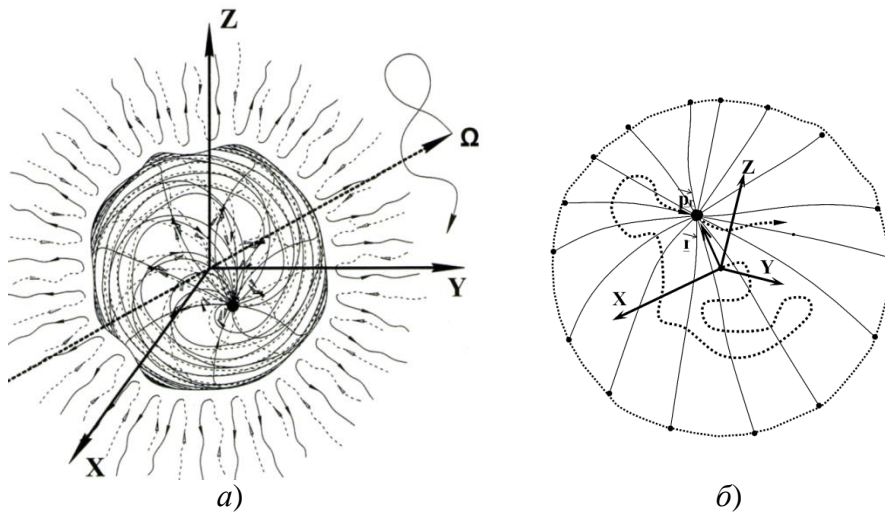


Рис. 1. а) В среднем сферически симметричное образование, внутри которого постоянно хаотически блуждает частица; б) Упрощенная модель частицы, хаотически блуждающей в окрестности условного центра совмещенного с началом системы координат XYZ

Примерами такого хаотического движения частицы могут послужить: электрон в атоме водорода, колебания атома в кристаллической решетке, хаотические полеты мухи в банке, дрожание ядра биологической клетки, шевеление центра масс эмбриона в утробе матери, блуждания кончика ветки дерева под порывами ветра, перемещения центра масс косяка рыб в океане, вибрации и смещения железного ядра в недрах планеты и т. п.

Полная механическая энергия хаотически блуждающей частицы (ХБЧ) в каждый момент времени и в каждой точке 3-мерного пространства равна

$$E(x,y,z,t) = T(x,y,z,t) + U(x,y,z,t), \quad (4)$$

где $T(x,y,z,t)$ – кинетическая энергия частицы, обусловленная скоростью ее движения в момент времени t ;

$U(x,y,z,t)$ – потенциальная энергия частицы, связанная с упругостью окружающей ее среды, стремящейся вернуть данную частицу в условный центр.

В наиболее общем случае каждая из энергий ХБЧ: $E(x,y,z,t)$, $T(x,y,z,t)$ и $U(x,y,z,t)$ является случайной функцией времени и места ее положения отно-

сительно условного центра, но энергии $T(x, y, z, t)$ и $U(x, y, z, t)$ так плавно переходят друг в друга, что их сумма всегда равна $E(x, y, z, t)$, т.е. всегда выполняется условие (2).

Если скорость ХБЧ невелика по сравнению со скоростью света, то согласно нерелятивистской механике, она обладает кинетической энергией

$$T(x, y, z, t) = \frac{p_x^2(x, y, z, t) + p_y^2(x, y, z, t) + p_z^2(x, y, z, t)}{2m},$$

или в компактном виде

$$T(\vec{r}, t) = \frac{p_x^2(\vec{r}, t) + p_y^2(\vec{r}, t) + p_z^2(\vec{r}, t)}{2m},$$

где $p_x(\vec{r}, t)$, $p_y(\vec{r}, t)$, $p_z(\vec{r}, t)$ – мгновенные значения компонент вектора импульса блуждающей частицы в момент времени t в точке с координатами x, y, z ; m – масса частицы; \vec{r} – радиус-вектор с началом в условном центре исследуемой стохастической системы ($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) (рис.1).

Вид потенциальной энергии частицы $U(x, y, z, t)$ на данном этапе исследования не конкретизируется.

Для упрощения математических выкладок рассмотрим одномерный случай, не ограничивающий общность заключений. В случае трех измерений увеличивается только число интегрирований.

Действие движущейся частицы в нерелятивистской механике определено следующим образом [10]

$$S(t) = \int_{t_1}^{t_2} [T(p_x, t) - U(x, t)] dt + E(x, t)t. \quad (5)$$

Из-за сложности траектории движения ХБЧ нас будет интересовать не само действие (5), а его усреднение

$$\bar{S}(t) = \int_{t_1}^{t_2} [\overline{T(p_x, t)} - \overline{U(x, t)}] dt + \overline{E(x, t)} \Delta t. \quad (6)$$

Усреднение действия (6) осуществляется по реализациям, взятым за один и тот же промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$.

Среднюю кинетическую энергию ХБЧ представим в виде

$$\overline{T(p_x, t)} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x, t) p_x^2 dp_x, \quad (7)$$

где $\rho(p_x, t)$ – ФПРВ x -компоненты импульса частицы p_x .

В (7) усреднение происходит по всем возможным p_x частицы, независимо от того в какое время и где она находится в рассматриваемой области 3-мерного пространства (рис.1).

Усредненную потенциальную энергию и усредненную полную механическую энергию ХБЧ представим в виде

$$\overline{U(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) U(x, t) dx, \quad (8)$$

$$\overline{E(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) E(x, t) dx, \quad (9)$$

где $\rho(x, t)$ – ФПРВ места возможного нахождения проекции блуждающей частицы на оси X (рис.1 а,б) в момент времени t .

Подставляя выражения (7), (8) и (9) в (6), получим усредненное действие хаотически блуждающей частицы (ХБЧ)

$$\bar{S}_x(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x, t) p_x^2 dp_x - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) U(x, t) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) E(x, t) dx \right\} dt. \quad (10)$$

$$\text{или} \quad \bar{S}_x(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x, t) p_x^2 dp_x + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) [E(x, t) - U(x, t)] dx \right\} dt. \quad (11)$$

Среднее действие рассматриваемой «стохастической системы» (11) предусматривает наиболее сложный случай, когда возможны различные варианты изменения усредненного состояния ХБЧ со временем t .

2.2 Стационарное состояние ХБЧ

Рассмотрим стационарный вариант стохастической системы, когда усредненное поведение ХБЧ не зависит от времени.

В этом случае поведение ХБЧ описывается стационарным случайным процессом (ССП) (смотрите Приложение 1), и все ее усреднённые характеристики не зависят от времени:

$$\rho(p_x, t) = \rho(p_x),$$

$$\overline{T(p_x, t)} = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x) p_x^2 dp_x, \quad (12)$$

$$\overline{U(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \overline{U(x)} dx, \quad (13)$$

$$\overline{E(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \overline{E(x)} dx, \quad (14)$$

где $\overline{U(x)}$ – средняя потенциальная энергия ХБЧ в точке x ;

$\overline{E(x)}$ – средняя полная механическая энергия ХБЧ в точке x .

Подставляя (12) – (14) в усредненное действие (6), получим

$$\bar{S}_x = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(p_x) p_x^2 dp_x - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \overline{U(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \overline{E(x)} dx \right\} dt. \quad (15)$$

Представим среднее действие (15) в координатном виде. Для этого выполним следующие действия:

1. Запишем ФПРВ $\rho(x)$ в виде произведения двух плотностей амплитуды вероятности (ПАВ) $\psi(x)$:

$$\rho(x) = \psi(x) \psi(x). \quad (16)$$

2. Разделим обе части выражения (15) на массу частицы m и сделаем замену переменной $p_x = mv_x$ с якобианом преобразования $J = 1/m$, в результате получим

$$\overline{s_x} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x) v_x^2 dv_x - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \overline{u(x)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \overline{\varepsilon(x)} dx \right\} dt. \quad (17)$$

где v_x – мгновенные значения x -компоненты вектора скорости ХБЧ;

s , $\varepsilon(x)$, $u(x)$, $t(v_x)$ – безмассовые величины, которым присвоим следующие названия:

$$s = S/m \quad (18)$$

– «эффективность» частицы;

$$\varepsilon(x) = E(x)/m \quad (19)$$

– «полная механическая энергетичность» частицы;

$$u(x) = U(x)/m \quad (20)$$

– «потенциальная энергетичность» частицы;

$$t(v_x) = T(v_x)/m = v_x^2/2 \quad (21)$$

– «кинетическая энергетичность» частицы.

3. Воспользуемся координатным представлением усредненной x - компоненты вектора скорости ХБЧ, возведенной в n -ю степень (П2.2) (смотрите Приложение 2). В частности при $n = 2$, имеем

$$\overline{v_x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v_x) v_x^2 dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x) dx, \quad (22)$$

где, согласно (П2.3) [или (П1.54), смотрите Приложение 1]

$$\eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{x\text{кор}}} \text{ – масштабный параметр,} \quad (23)$$

σ_x – стандартное отклонение стационарного случайного процесса $x(t)$, связанного с проецированием места положения ХБЧ на ось X ;

$\tau_{x\text{кор}}$ – интервал автокорреляции данного случайного процесса $x(t)$.

4. Используя выражения (12), (21) и (22), представим усредненную кинетическую энергетичность ХБЧ в виде

$$\overline{t(x,t)} = \frac{\overline{T(x,t)}}{m} = \frac{1}{2} \overline{v_x^2(x,t)} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x) v_x^2 dv_x = \frac{\eta_x^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} dx. \quad (24)$$

5. Средняя потенциальная энергетичность частицы согласно (13) и (20), и ее средняя полная механическая энергетичность согласно (14) и (19), с учётом (16), принимают вид

$$\overline{u(x,t)} = \frac{\overline{U(x,t)}}{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \overline{u(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \overline{u(x)} \psi(x) dx, \quad (25)$$

$$\overline{\varepsilon(x,t)} = \frac{\overline{E(x,t)}}{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) \overline{\varepsilon(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \overline{\varepsilon(x)} \psi(x) dx. \quad (26)$$

6. Подставим выражения (24), (25) и (26) в интеграл (17)

$$\overline{s_x} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\eta_x^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \overline{u(x)} \psi(x) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \overline{\varepsilon(x)} \psi(x) dx \right\} dt. \quad (27)$$

Объединяя все слагаемые в (27) под один интеграл, получим следующий вид средней «эффективности» ХБЧ в координатном представлении

$$\overline{s_x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta_x^2}{2} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} - \psi^2(x,t) [\overline{\varepsilon(x)} - \overline{u(x)}] \right) dx dt. \quad (28)$$

Средняя эффективность (28) характеризует рассматриваемую стохастическую систему в стационарном состоянии (т.е. когда усредненное состояние хаотически блуждающей частицы не изменяется со временем).

В этом случае баланс энергетичности рассматриваемой стохастической системы можно представить в виде

$$\overline{\varepsilon(x, y, z)} = \overline{t(x, y, z)} + \overline{u(x, y, z)} = \text{const}. \quad (28a)$$

Условие (28a) говорит о том, что ХБЧ в среднем не теряет полную механическую энергетичность. В этом случае можно предположить, что вязкость среды, окружающей ХБЧ, носит комплексный характер, т.к. бурлящая среда то забирает часть энергетичности у частицы, то возвращает ей ту же часть энергетичности.

2.3 Стационарное стохастическое уравнение Эйлера-Пуассона

Найдем экстремаль функционала (28), т. е. определим функцию $\psi(x)$, при которой средняя эффективность

$$\overline{s_x} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta_x^2}{2} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi^2(x) [\overline{\varepsilon(x)} - \overline{u(x)}] \right) dx dt. \quad (29)$$

принимает экстремальное значение.

Поскольку в (29) отсутствуют функции, зависящие от времени, будем искать условие экстремальности внутреннего интеграла

$$w = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta_x^2}{2} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi^2(x) [\overline{\varepsilon(x)} - \overline{u(x)}] \right) dx \quad (30)$$

В вариационном исчислении показано [11], что экстремаль $y = f(x)$ функционала общего вида

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} F \left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \right) dx, \quad (31)$$

определяется уравнением Эйлера-Пуассона [11]

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} + \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (32)$$

В случае поиска экстремали функционала (30), имеем

$$y = \psi(x), \quad F = \frac{\eta_x^2}{2} \psi(x) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi^2(x) [\overline{\varepsilon(x)} - \overline{u(x)}], \quad (33)$$

при этом уравнение Эйлера-Пуассона (32) упрощается

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} = 0. \quad (34)$$

$$\text{где } F_y = \frac{\eta_x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + 2\psi(x) [\overline{\varepsilon(x)} - \overline{u(x)}], \quad F_{y'} = 0 \quad \text{и} \quad F_{y''} = \frac{\eta_x^2}{2} \psi(x). \quad (35)$$

Подставляя (35) в (34), с учетом

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2}, \quad (36)$$

получим одномерное стохастическое уравнение Эйлера-Пуассона

$$\frac{\eta_x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \psi(x) [\overline{\varepsilon(x)} - \overline{u(x)}] = 0. \quad (37)$$

Обобщение на три измерения, сводится к увеличению числа интегрирований, при этом вместо уравнения (37), получим

$$\frac{\eta_{x,y,z}^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z)}{\partial z^2} \right\} + [\overline{\varepsilon(x, y, z)} - \overline{u(x, y, z)}] \psi(x, y, z) = 0$$

или в компактном виде

$$\frac{\eta_r^2}{2} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + [\overline{\varepsilon(\vec{r})} - \overline{u(\vec{r})}] \psi(\vec{r}) = 0, \quad (39)$$

$$\text{где } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \text{оператор Лапласа;} \quad (40)$$

$$\eta_r = \eta_{x,y,z} = \frac{2\sigma_r^2}{\tau_{r\text{cor}}} \quad (41)$$

– масштабный параметр, где для трехмерного случая:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2} \quad (42)$$

– стандартное отклонение случайной 3-мерной траектории ХБЧ от условного центра рассматриваемой стохастической системы (рис. 1);

$$\tau_{r\text{cor}} = \frac{1}{3} (\tau_{x\text{cor}} + \tau_{y\text{cor}} + \tau_{z\text{cor}}) \quad (43)$$

– интервал автокорреляции данного 3-мерного стационарного случайного процесса.

Выражение (39) будем называть безмассовым стационарным (т.е. времени - независимым) стохастическим уравнением Эйлера-Пуассона для нахождения экстремали $\psi(\vec{r}) = \psi(x, y, z)$ функционала

$$\overline{s_r} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta_r^2}{2} \psi(x, y, z) \nabla^2 \psi(x, y, z) + \psi^2(x, y, z) [\overline{\varepsilon(x, y, z)} - \overline{u(x, y, z)}] \right) dx dy dz dt,$$

с балансом энергетичности рассматриваемой стационарной стохастической системы (28а).

2.4 Стохастическое уравнения Шредингера-Эйлера-Пуассона

Предположим, что полная механическая энергетичность ХБЧ всегда остается постоянной, при этом уравнение (4), с учетом (19) – (21), упрощается

$$\varepsilon = t(x, y, z, t) + u(x, y, z, t) = \text{const}. \quad (45)$$

В такой стационарной стохастической системе кинетическая энергетичность ХБЧ $t(x, y, z, t)$ и ее потенциальная энергетичность $u(x, y, z, t)$ так случайно изменяются и плавно переходят друг в друга, что их сумма (т. е. полная механическая энергетичность ε) всегда остается постоянной.

Условие (45) говорит о том, что в данном случае ХБЧ никогда не теряет полную энергетичность на трение с окружающей средой. Причиной такого хаотического поведения частицы могут послужить случайные флуктуации ее потенциальной энергетичности.

Усреднение выражения (45) приводит к условию

$$\varepsilon = \overline{t(x, y, z, t)} + \overline{u(x, y, z, t)} = \text{const}, \quad (46)$$

а уравнение (39) приобретает вид

$$-\frac{\eta_r^2}{2} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \overline{u(\vec{r})} \psi(\vec{r}) = \varepsilon \psi(\vec{r}), \quad (47)$$

В нерелятивистской безмассовой стохастической квантовой механике (БСКМ), развиваемой в данной статье, уравнение (47) является аналогом стационарного (т.е. времени - независимого) уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \overline{U(\vec{r})} \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}). \quad (48)$$

Разделим обе части уравнения (48) на массу частицы m

$$-\frac{\hbar^2}{2m^2} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \frac{\overline{U(\vec{r})}}{m} \psi(\vec{r}) = \frac{E}{m} \psi(\vec{r}), \quad (49)$$

и примем во внимание определения (19) – (20). В результате представим стационарное уравнение Шредингера в следующем виде

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \nabla^2 \psi(\vec{r}) + \overline{u(\vec{r})} \psi(\vec{r}) = \varepsilon \psi(\vec{r}), \quad (50)$$

Сравнивая уравнения (47) и (50), обнаруживаем, что они полностью совпадают при

$$\eta_r = \frac{2\sigma_r^2}{\tau_{r\text{cor}}} = \frac{\hbar}{m}. \quad (51)$$

это соотношение уже было получено в Приложении 1, смотрите (П1.49).

Поэтому будем называть выражение (47) безмассовым стационарным стохастическим уравнением Шредингера-Эйлера-Пуассона для нахождения экстремали $\psi(x, y, z)$ функционала

$$\overline{s_r} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta_r^2}{2} \psi^2(x, y, z) \nabla^2 \psi(x, y, z) + \psi^2(x, y, z) [\varepsilon - \overline{u(x, y, z)}] \right) dx dy dz dt. \quad (52)$$

с балансом энергетичности (46).

2.5 Стохастические квантовые операторы

Покажем, как получаются операторы в безмассовой стохастической квантовой механике (БСКМ). Для этого вернемся к рассмотрению модели хаотически блуждающей частицы (ХБЧ), показанной на рис. 1.

Во время хаотического движения частицы в окрестности условного центра, она постоянно меняет направление своего движения. Поэтому частица в каждый момент времени обладает моментом импульса

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (53)$$

где \vec{r} – радиус вектор от условного центра до частицы (рис. 1);

$\vec{p} = m\vec{v}$ – мгновенное значение и направление вектора импульса частицы.

Поделим обе части векторного выражения (53) на величину $m|\vec{r}|^2$, в результате получим вектор угловой скорости

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{L}}{m|\vec{r}|^2} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{|\vec{r}|^2}. \quad (54)$$

Представим векторное уравнение (54) в компонентном виде

$$\omega_x = \frac{1}{|\vec{r}|^2}(yv_z - zv_y), \quad \omega_y = \frac{1}{|\vec{r}|^2}(zv_x - xv_z), \quad \omega_z = \frac{1}{|\vec{r}|^2}(xv_y - yv_x), \quad (55)$$

Усредним данные компоненты

$$\overline{\omega_x} = \frac{1}{|\vec{r}|^2}(y\overline{v_z} - z\overline{v_y}), \quad \overline{\omega_y} = \frac{1}{|\vec{r}|^2}(z\overline{v_x} - x\overline{v_z}), \quad \overline{\omega_z} = \frac{1}{|\vec{r}|^2}(x\overline{v_y} - y\overline{v_x}), \quad (56)$$

Воспользуемся координатным представлением усредненных компонент вектора скорости (П2.2) при $n = 1$

$$\overline{v_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x) dx = \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \psi(x) dx, \quad (57)$$

$$\overline{v_y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \left(-i\eta_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(y) dy = \left(-i\eta_y \frac{\partial}{\partial y} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y) \psi(y) dy, \quad (58)$$

$$\overline{v_z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) \left(-i\eta_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(z) dz = \left(-i\eta_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z) \psi(z) dz. \quad (59)$$

Учтем, что, например, в (57)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = 1. \quad (60)$$

Поэтому тождества (57) – (59) эквивалентны безмассовым стохастическим операторам компонент вектора скорости

$$\hat{v}_x = \frac{\eta_r}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{v}_y = \frac{\eta_r}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{v}_z = \frac{\eta_r}{i} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (61)$$

здесь учтено, что для изотропного случая $\eta_x = \eta_y = \eta_z = \eta_r$.

Безмассовые стохастические операторы (61), с учетом (51), соответствуют операторам компонент вектора импульса КМ [12]

$$\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{p}_y = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{p}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Подставляя (57) – (59) в (56), с учетом (60), получим безмассовые стохастические операторы компонент вектора угловой скорости ХБЧ

$$\hat{\omega}_x = \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{\omega}_y = \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{\omega}_z = \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (62)$$

которые соответствуют квантово-механическим операторам компонент вектора момента импульса [12]

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

В сферической системе координат стохастические операторы (62) имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_x &= \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{\omega}_y &= \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{\omega}_z &= \frac{\eta_r}{i|\vec{r}|^2} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (63)$$

Стохастический безмассовый оператор квадрата модуля угловой скорости ХБЧ равен

$$\hat{\omega}^2 = \hat{\omega}_x^2 + \hat{\omega}_y^2 + \hat{\omega}_z^2 = -\frac{\eta_r^2}{|\vec{r}|^4} \nabla_{\theta, \varphi}^2,$$

где

$$\nabla_{\theta, \varphi}^2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (64)$$

Подобным образом могут быть получены все безмассовые стохастические квантовые операторы БСКМ, аналогичные операторам КМ. Только в БСКМ вместо отношения \hbar/m присутствует масштабный параметр η_r (41), поэтому БСКМ пригодна для описания стохастических процессов любого масштаба.

Аналогичным образом может быть выстроен математический аппарат всей безмассовой стохастической квантовой механики (БСКМ), который

практически полностью совпадает с математическим аппаратом КМ. Но БСКМ основана на принципах «обыденной» (классической) логики, и пригодна для описания квантовых систем и эффектов любого масштаба.

2.6 Соотношение неопределенностей в БСКМ

Неопределенность в скорости хаотически блуждающей частицы (ХБЧ) определяется стандартным отклонением

$$\sqrt{v_x^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \psi(x) dx}, \quad (65)$$

а неопределенность в координате частицы определяется волатильностью

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) x^2 \psi(x) dx}. \quad (66)$$

Совместная неопределенность по координате и импульсу может быть представлена в виде

$$\sqrt{v_x^2 x^2} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 x^2 \psi(x) dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left(\eta_x^2 \frac{\partial^2 x^2}{\partial x^2} \right) \psi(x) dx} = \sqrt{2}\eta_x.$$

Данное соотношение неопределенностей БСКМ эквивалентно соотношению неопределенностей Гейзенберга в КМ $\Delta x \Delta p_x \geq 2\pi \hbar$.

2.7 Времени-зависимое уравнение Шредингера-Эйлера-Пуассона

Пусть усредненные характеристики случайной траектории движения ХБЧ изменяются со временем, но настолько медленно, что в каждый малый промежуток времени Δt все данные характеристики можно считать неизменными. Такое нестабильное поведение частицы рассмотрено в Приложении 1 и названо псевдо-стационарным случайным процессом (ПССП).

Допустим так же, что у такой псевдо-стационарной стохастической системы со временем незначительно изменяется и полная механическая энергетичность (ПМЭ)

$$\overline{\varepsilon(x, y, z, t)} = \overline{t(x, y, z, t)} + \overline{u(x, y, z, t)}, \quad (68)$$

В рассматриваемой модели незначительное усредненное изменение ПМЭ блуждающей частицы $\pm \overline{d\varepsilon_t(x, y, z, t_0 + \Delta t)}$ связано с медленным изменением ее кинетической энергетичности $\pm \overline{dt(x, y, z, t_0 + \Delta t)}$ за счет внешнего влияния в виде «подогрева» или «охлаждения» стохастической системы.

Поскольку изменение ПМЭ происходит медленно, можно записать

$$\overline{\varepsilon(x, y, z, t)} = \overline{\varepsilon(x, y, z, t_0)} \pm \overline{d\varepsilon_t(x, y, z, t_0 + \Delta t)}, \quad (69)$$

знаки (+) или (–) в (69) связаны соответственно с увеличением или с уменьшением усредненной ПМЭ с течением времени t .

В дальнейшем для сокращения вычислений будем рассматривать одномерный случай, без ущерба для общности заключений на случай 3-х измерений, и представим (69) в сокращенном виде

$$\overline{\varepsilon(x, t)} = \overline{\varepsilon(x, t_0)} \pm \overline{d\varepsilon_t(x, t_0 + \Delta t)}, \quad (70)$$

где $\overline{d\varepsilon_t(t_0 + \Delta t)}$ – усредненное малое изменение ПМЭ хаотически блуждающей частицы, связанное с увеличением (или уменьшением) ее усредненной кинетической энергетичности за малый промежуток времени Δt .

В этом случае средняя эффективность ХБЧ (т.е. результат деления обеих частей выражения (6) на массу частицы m) имеет вид

$$\overline{s_x(t)} = \int_{t_1}^{t_2} [\overline{t(v_x, t)} - \overline{u(x, t)}] dt + \overline{\varepsilon(x, t)} \Delta t, \quad (71)$$

или с учетом (70)

$$\overline{s_x(t)} = \int_{t_1}^{t_2} [\overline{t(v_x, t)} - \overline{u(x, t)}] dt + [\overline{\varepsilon(x, t_0)} \pm \overline{d\varepsilon_t(x, t)}] \Delta t. \quad (72)$$

По аналогии с (10) представим среднюю эффективность (72) в виде

$$\overline{s_x}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x, t) v_x^2 dv_x - \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) \overline{u(x, t)} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) [\overline{\varepsilon(x, t_0)} \pm \overline{d\varepsilon_t(x, t)}] dx \right\} dt. \quad (73)$$

Запишем данное выражение в координатном представлении. Для этого, выразим ФПРВ $\rho(v_x, t)$ и $\rho(x, t)$ через плотности амплитуды вероятности $\psi(x, t)$. Согласно (A1.55) и (A2.2) имеем:

$$\rho(x, t) = \psi(x, t) \overline{\psi(x, t)}, \quad (74)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(v_x, t) v_x^2 dv_x \overline{t(x, t)} = \frac{\overline{T(x, t)}}{m} = \overline{t(x, t)} = \frac{1}{2} \overline{v_x^2(x, t)} = \frac{\eta_x^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} dx, \quad (75)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) \overline{u(x, t)} dx = \frac{\overline{U(x, t)}}{m} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \overline{u(x, t)} \psi(x, t) dx, \quad (76)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x, t) [\overline{\varepsilon(x, t_0)} \pm \overline{d\varepsilon_t(x, t)}] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) \overline{\varepsilon(x, t_0)} \psi(x, t) dx \pm i \frac{\eta_x^2}{2D} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} dx. \quad (77)$$

В выражении (77) учтено, что согласно (П2.23)

$$\overline{d\varepsilon_t(x, t)} = -i \frac{\eta_x^2}{2D} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} dx, \quad (78)$$

где D – мнимая часть комплексного коэффициента диффузии $B=iD$ хаотически блуждающей частицы (ХБЧ).

Подставляя (75) – (77) в (73), получим координатное представление псевдо-стационарной усредненной «эффективности» ХБЧ

$$\overline{s_x}(t) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta_x^2}{2} \psi(x, t) \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - [\overline{\varepsilon(x, t_0)} - \overline{u(x, t)}] \psi^2(x, t) \pm i \frac{\eta_x^2}{2D} \psi(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right) dx dt. \quad (79)$$

Найдем экстремаль $\psi(x, t)$ функционала (79).

Сначала напомним, что условие экстремальности функционала вида

$$S = \iint L \left(x, t, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} \right) dx dt, \quad \text{где } z = \psi(x, t), \quad (80)$$

определяется уравнением Эйлера - Пуассона [11, стр. 316]

$$L_z - \frac{\partial}{\partial x} \{L_p\} - \frac{\partial}{\partial t} \{L_g\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{L_r\} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{L_t\} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \{L_s\} = 0, \quad (81)$$

где

$$L_z - \text{частная производная лагранжиана } L \text{ по } z = \psi(x, t); \quad (82)$$

$$L_p - \text{частная производная } L \text{ по } p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x};$$

$$L_g - \text{частная производная } L \text{ по } g = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t};$$

$$L_r - \text{частная производная } L \text{ по } r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2};$$

$$L_t - \text{частная производная } L \text{ по } t = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2};$$

$$L_s - \text{частная производная } L \text{ по } s = \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t \partial x},$$

при этом

$$\frac{\partial}{\partial x} \{L_p\} = L_{px} + L_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + L_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + L_{pg} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (83)$$

– полная производная по x ;

$$\frac{\partial}{\partial t} \{L_g\} = L_{gt} + L_{gz} \frac{\partial z}{\partial t} + L_{gp} \frac{\partial p}{\partial t} + L_{gg} \frac{\partial g}{\partial t}$$

– полная производная по t ;

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{L_r\} = \frac{\partial^2 L_r}{\partial x^2} + L_{rz} \frac{\partial z}{\partial x^2} + L_{rp} \frac{\partial p}{\partial x^2} + L_{rg} \frac{\partial g}{\partial x^2}$$

– полная вторая частная производная по x^2 ;

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \{L_t\} = \frac{\partial^2 L_t}{\partial t^2} + L_{tz} \frac{\partial z}{\partial t^2} + L_{tp} \frac{\partial p}{\partial t^2} + L_{tg} \frac{\partial g}{\partial t^2}$$

– полная вторая частная производная по t^2 ;

$$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \{L_s\} = \frac{\partial^2 L_s}{\partial t \partial x} + L_{sz} \frac{\partial z}{\partial t \partial x} + L_{sp} \frac{\partial p}{\partial t \partial x} + L_{sg} \frac{\partial g}{\partial t \partial x}$$

– полная смешанная частная производная по t и x .

В качестве лагранжиана L используем подынтегральное выражение из времени-зависимой (псевдо-стационарной) усредненной «эффективности» ХБЧ (79)

$$L = \frac{\eta_x^2}{2} \psi(x, t) \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - [\overline{\varepsilon(x, t_0)} - \overline{u(x)}] \psi^2(x, t) \pm i \frac{\eta_x^2}{2D} \psi(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \quad (84)$$

В результате подстановки лагранжиана (84) в выражения (82) и (83), получим

$$\begin{aligned} L_z &= \frac{\eta_x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - 2\psi(x, t) [\overline{\varepsilon(x, t_0)} - \overline{u(x, t)}] \pm i \frac{\eta_x^2}{2D} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}; & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{L_i\} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \{L_p\} &= 0; & \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \{L_s\} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \{L_g\} &= \pm i 2 \frac{\eta_x^2}{2D} \psi(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}; & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \{L_r\} &= 2 \frac{\eta_x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (85)$$

Подставляя выражения (85) в уравнение Эйлера - Пуассона (81), получим искомое уравнение для определения экстремали $\psi(x, t)$ функционала (79)

$$\pm i \frac{\eta_x^2}{2D} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{3\eta_x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + 2[\overline{\varepsilon(x, t_0)} - \overline{u(x, t)}] \psi(x, t) \quad (86)$$

Обобщение на три измерения, сводится к увеличению числа интегрирований, при этом вместо уравнения (86), получим

$$\begin{aligned} \pm i \frac{\eta_r^2}{2D} \frac{\partial \psi(x, y, z, t)}{\partial t} &= \frac{3\eta_r^2}{2} \left\{ \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right\} + \\ &+ 2[\overline{\varepsilon(x, y, z, t_0)} - \overline{u(x, y, z, t)}] \psi(x, y, z, t), \end{aligned} \quad (87)$$

или в компактном виде

$$\pm i \frac{\eta_r^2}{2D} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{3\eta_r^2}{2} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + 2[\overline{\varepsilon(\vec{r}, t_0)} - \overline{u(\vec{r}, t)}] \psi(\vec{r}, t), \quad (88)$$

где \vec{r} – радиус-вектор с началом в условном центре исследуемого объекта

(рис.1), $(r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$; η_r – масштабный параметр (41) [или (П2.24)].

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

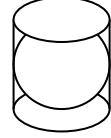
Уравнение (88) представим в виде

$$\pm i \frac{\eta_{r1}^2}{3D} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \eta_{r1}^2 \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + 2[\overline{\varepsilon(\vec{r}, t_0)} - \overline{u(\vec{r}, t)}] \psi(\vec{r}, t), \quad (89)$$

где согласно (41) [или (П2.24)]

$$\eta_{r1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \eta_r = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2\sigma_r^2}{\tau_{r\text{cor}}} = \sqrt{6} \frac{\sigma_r^2}{\tau_{r\text{cor}}}. \quad (89a)$$

Объем цилиндра относится к объему вписанной в него сферы как 3/2. Архимед был столь потрясен этим своим открытием, что завещал выгравировать сферу, вписанную в цилиндр на своем надгробном камне. Считается, что в последствие Цицерон нашел могилу Архимеда именно по этому символу геометрической гармонии (прим. Петухова С.В.).



Выражение (89) будем называть безмассовым псевдо-стационарным стохастическим уравнением Эйлера-Пуассона.

Данное уравнение (89) позволяет найти экстремаль $\psi(x, y, z, t) = \psi(\vec{r}, t)$ функционала усредненной «эффективности» ХБЧ

$$\overline{s_r} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\eta_r^2}{2} \psi(\vec{r}, t) \nabla^2 \psi(\vec{r}) - [\overline{\varepsilon(\vec{r}, t_0)} - \overline{u(\vec{r}, t)}] \psi^2(\vec{r}, t) \pm i \frac{\eta_r^2}{2D} \psi(\vec{r}, t) \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right) dx dy dz dt.$$

с балансом энергетичности исследуемой псевдо-стационарной стохастической системы (68), которая изменяется настолько медленно, что в каждый малый промежуток времени можно считать $\overline{\varepsilon(x, y, z, t)}$ постоянной.

2.8 Псевдо-стационарное (времени-зависимое) стохастическое уравнение Шредингера-Эйлера-Пуассона

Обе части времени-зависимого уравнения Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t), \quad (90)$$

поделим на массу частицы m и умножим на -2

$$-i \frac{2\hbar}{m} \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{m^2} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) - 2 \frac{\overline{U(\vec{r}, t)}}{m} \psi(\vec{r}, t).$$

С учетом (25) и (51) это выражение принимает вид

$$-i2\eta_r \frac{\partial \psi(\bar{r}, t)}{\partial t} = \eta_r^2 \nabla^2 \psi(\bar{r}, t) - 2 \overline{u(\bar{r}, t)} \psi(\bar{r}, t). \quad (90a)$$

С другой стороны, если предположить, что в уравнении (89) полная механическая энергетичность ХБЧ в начальный момент времени t_0 равна нулю, т.е.

$$\overline{\varepsilon(\bar{r}, t_0)} = 0 \quad \text{и} \quad D = \frac{1}{3} \eta_{r1} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \eta_r = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sigma_r^2}{\tau_{r\text{cor}}}, \quad (91)$$

то это уравнение приобретает вид

$$\pm i2\eta_{r1} \frac{\partial \psi(\bar{r}, t)}{\partial t} = \eta_{r1}^2 \nabla^2 \psi(\bar{r}, t) - 2 \overline{u(\bar{r}, t)} \psi(\bar{r}, t). \quad (92)$$

Очевидно, что уравнения (90a) и (92) отличаются только знаками \pm перед их левой частью и величиной масштабного параметра η_{r1} . Поэтому уравнение (92) будем называть безмассовым времени-зависимым стохастическим уравнением Шредингера-Эйлера-Пуассона с мнимым коэффициентом диффузии $B=iD=i\eta_{r1}/3$.

Напомним, что знак $+$ или $-$ в левой части уравнения (92) зависит от увеличения или уменьшения со временем усредненной полной механической энергетичности $\pm \overline{\delta \varepsilon_t(\bar{r}, t_0 + \Delta t)}$ рассматриваемой ХБЧ [смотрите выражение (69)].

Интересно отметить, что Эрвин Шрёдингер записал уравнение (4'') in "Quantisierung als Eigenwertproblem, Vierte Mitteilung", Annalen der Physik (1926) [1] в следующем виде

$$\Delta \psi - \frac{8\pi^2}{h^2} V \psi \pm \frac{4\pi i}{h} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

Переставим слагаемые в этом выражении и учтем, что $\hbar = h/2\pi$,

$$\pm 2i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hbar^2 \nabla^2 \psi - 2V \psi. \quad (93)$$

Прослеживается полная аналогия (или полное совпадение при $\hbar \sim \eta_{r1}$) между основным уравнением КМ (93) и уравнением БСКМ (92).

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В статье рассмотрены усредненные состояния частицы (т.е. компактного тела) любой величины, которая под действием флуктуаций окружающей среды и/или различных далекодействующих сил непрерывно хаотически блуждает (колеблется, смещается) в 3-мерном пространстве подобно броуновской частице.

Постоянно дрожащее (смещающееся, колеблющееся) тело представляется в виде хаотически блуждающей частицы (ХБЧ), обладающей непрерывной траекторией движения и объемом. При этом внутренняя структура ХБЧ не рассматривается, и деформации ее формы не учитываются.

К таким ХБЧ можно отнести **центры масс**: валентного электрона в водородоподобном атоме; колеблющегося атома в кристаллической решетке; волнующегося сердца в груди животного; трепещущего желтка в курином яйце; порхающего мотылька в окрестности горячей лампы; плавающей рыбы в аквариуме; смещающегося комариного роя; летающего комара в рое, дрожащей органеллы в биологической клетке; колеблющейся самой биологической клетки в живой ткани; вибрирующего железного ядра в недрах планеты; блуждающей пыльцы в разбавленном сахарном сиропе; мечущегося пузырька воздуха в кипящей жидкости; шевелящегося эмбриона в утробе матери; смещающегося косяка рыб в океане; перемещающегося космонавта в модуле космической станции; мчащейся галактики в космическом пространстве; трепещущего цветка на ветру, и т.д.

Все эти стохастические системы подобны друг другу и подчиняются одним и тем же законам, с учетом различных типов коэффициента трения и вязкости среды, окружающей ХБЧ, а так же длительностью периода усреднения ее поведения. Например, чтобы усреднить хаотические полеты птицы в клетке требуется неделя непрерывных наблюдений за ней; тогда как для усреднения хаотических смещений ядра галактики относительно основной

линии ее движения в космическом пространстве потребуется миллионы лет исследований. Но результаты таких наблюдений могут оказаться аналогичными, несмотря на большую разницу в масштабах этих событий.

Для примера, в Приложении 3 теоретически предсказано, что возможные усредненные состояния колеблющегося ядра биологической клетки подобны дискретным состояниям 3-мерного квантово-механического осциллятора (т.е. элементарной частицы, находящейся в аналогичных условиях). Если эти микроскопические квантовые эффекты подтвердятся экспериментально, то мы получим возможность наметить пути решения проблемы измерений в стохастической квантовой механике.

В рамках БСКМ проблему изучения «чистых» состояний пико-частиц предлагается решать следующим образом. Необходимо найти (или смоделировать) стохастическую макроскопическую систему, аналогичную исследуемой пикоскопической системе (т.е. хаотически блуждающей пико-частице), и провести эксперименты с макроскопической системой, не оказывая на нее ощутимого влияния. Затем результаты измерений на макроуровне спроецировать на возможные аналогичные проявления пикоскопической системы.

В рамках БСКМ такой подход к изучению «чистых» состояний пикоскопических и мегаскопических систем возможен, поскольку философские основы этой стохастической механики уходят корнями в глубокую древность и зиждутся на убеждении, что все уровни Мироздания подобны друг другу. В этом смысле БСКМ является универсальной теорией для всех уровней организации хаотически колеблющейся (смещающейся, дрожащей, блуждающей, шевелящейся) материи.

Применительно к пико-частицам (т.е. частицам атомного и субатомного масштаба) БСКМ соответствует стохастической квантовой механике (СКМ) Эдварда Нельсона [2]. При этом уравнения БСКМ (47) и (89), выведенные в этой статье на основании принципа экстремума «эффективности»

ХБЧ, с точностью до коэффициентов совпали с соответствующими уравнениями Шредингера (48) и (90).

Другими словами, в БСКМ «чистая» волновой функции $\psi(x,t)$ – это экстремаль функционала усредненной «эффективности» БЧХ, записанной в координатном представлении.

Стохастические уравнения (47) и (89) имеют ряд следующих преимуществ над соответствующими уравнениями Шредингера (48) и (90):

1]. В рассуждениях, приведенных для вывода стохастических уравнения (47) и (89), на хаотически блуждающую частицу (ХБЧ) не было наложено ни одного ограничения, кроме балансов полной механической энергетичности (46) и (68). То есть ХБЧ – это обычная частица, имеющая: объем, траекторию движения, место положения и импульс в каждое мгновение времени. Другими словами, вывод стохастических уравнений Шредингера-Эйлера-Пуассона (47) и (89) получен на основе «обыденной» (классической) логики с применением теории вероятностей, теории обобщенных функций и вариационного исчисления (точнее лагранжева формализма).

Тогда как за 95 лет, с момента появления в 1926 уравнений Шредингера, многие исследователи предлагали различные способы их вывода, опираясь на аксиомы множества различных интерпретаций квантовой механики, но всеми признанного результата так и не было получено.

К таким работам относятся: Rosen, N. (1964) [13]; Nelson, E. (1966) [2]; Chen, R.L.W. (1989) [15]; Vleck, V.J.H. (1994) [16]; Yung & Jick H. Yee, (1994) [58]; Peice, P. (1996) [17]; Ogiba, F. (1996) [18]; Briggs, J. & Rost, J.M., (2001) [19]; Hall, M. J. W. & Reginatto, M. (2002) [21]; Grössing, G. (2002) [22]; Inage, S. (2006) [23]; Briggs, J., Boonchui, S. & Khemmani, S. (2007) [20]; Ward D.W., Volkmer S.M. (2008) [24]; Ricardo, C-S. (2010) [25]; Szepessy, A. (2010) [26]; Pranab, R. S. (2011) [27]; Field, J.H. (2011) [28]; Chiarelli, P. (2012) [29]; Schleich W.P., Greenberger D.M., Scully M.O. (2013) [30]; Nanni, L. (2015) [31]; Barde, N.P., Kokne, P.M. & Bardapurkar, P. P. (2015) [32]; Wieser, R.

(2015) [33]; Godart, M. (2016) [35]; Olavo, L. S. F. (2016) [36]; Baixaul, J.G. (2016) [38]; Faycal Ben Adda (2018) [39]; Chavanis, P.-H. (2018) [40]; Wang, X.-S. (2018) [41] и другие).

За 100 лет интенсивного поиска научному сообществу так и не удалось выработать логически непротиворечивые обоснования аксиом КМ. Одна из причин общей неудовлетворенности заключалась в отсутствие «красивого» вывода уравнений Шредингера.

2]. Редуцированная постоянная Планка ($\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц) ограничивает область применения уравнений Шредингера (48) и (90), и всей КМ в целом, описанием явлений атомного и субатомного масштаба.

Дело в том, что отношение \hbar/m , явно или латентно присутствующее в уравнениях Шредингера, только тогда оказывается физически значимым, когда масса частицы m очень мала (например, считается, что масса покоя электрона $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31}$ кг).

Тогда как область применения стохастических уравнений Шредингера-Эйлера-Пуассона (47) и (89), ничем не ограничена.

Чтобы использовать уравнения (47) и (89) для описания усредненных состояний любой из вышеперечисленных стохастических систем необходимо оценить их масштабный параметр η_r (41). Для этого нужно на основе достаточно длительных наблюдений за центром масс ХБЧ определить стандартное отклонение σ_r и интервал автокорреляции $\tau_{r\,cor}$ трехмерного случайного процесса, в котором эта частица участвует.

В качестве примера в Приложении 3 показана возможность применения безмассового стационарного стохастического уравнения Шредингера-Эйлера-Пуассона (47) для получения квантовых чисел, характеризующих возможные усредненные состояния хаотически колеблющегося ядра биологической клетки в период интерфазы.

3]. Стохастическое уравнение (47) применимо также для описания усредненных состояний хаотически перемещающегося центра масс электрона в окрестности ядра водородоподобного атома. Если в результате статистической обработки косвенных наблюдений за хаотическим поведением валентного электрона в таком атоме выяснится, что его масштабный параметр равен

$$\eta_{er} = \frac{2\sigma_{er}^2}{\tau_{er\,cor}} \approx \frac{\hbar}{m_e} = \frac{1,055 \cdot 10^{-34}}{9,1 \cdot 10^{-31}} \approx 0,116 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 / \text{с},$$

то уравнения (47) и (50) для данного случая окажутся практически полностью эквивалентными. В этом смысле стационарное (т.е. времени - независимое) уравнение Шредингера (50) можно рассматривать как частный случай стационарного стохастического уравнения Шредингера - Эйлера - Пуассона (47).

4]. В уравнениях Шредингера (48) и (90) явно или латентно присутствует масса элементарной частицы, которую в принципе невозможно непосредственно измерить посредством макроскопических средств измерений.

Тогда как в стохастических уравнениях Шредингера-Эйлера-Пуассона (47) и (89) отсутствует масса частицы. При этом стандартное отклонение σ_r и интервал автокорреляции $\tau_{r\,cor}$ трехмерного случайного процесса, в котором участвует ХБЧ, всегда могут быть оценены исходя из статистической обработки результатов достаточно длительных наблюдений за практически любой стохастической системой. Поэтому стохастические уравнения (39), (47), (89) и (92), полученные в этой статье, могут быть применены для исследования квантовых явлений любого масштаба.

БСКМ предсказывает, что многие стационарные случайные процессы (в которых участвуют ХБЧ) имеют возможность перехода из одного стационарного состояния в другое с поглощением или высвобождением определенной части полной механической «энергетичности».

Это несложно проверить, например, на мотельке, постоянно хаотически летающей вокруг святающейся лампы. С помощью видеокамеры можно долго снимать его хаотические перемещения. Если затем прокрутить видеозапись с большой скоростью, то на экране не будет видно мотылька, а будет устойчивое размытое темное пятно, которое отражает ФПРВ места нахождения его центра масс. Следует ожидать, что если мотылька ничем не беспокоить, то размытое пятно будет напоминать гауссову ФПРВ с наибольшим затемнением в области центра лампочки. Однако если на мотылька как-нибудь энергетически воздействовать, например, теплом или ультразвуком с определенной частотой, то его усредненное поведение может резко (скачкообразно) измениться. При этом размытое пятно может менять конфигурацию на усредненное кольцо или на усредненную восьмерку и т.д.

Также центр масс цветка в зависимости от интенсивности порывов ветра может в среднем описывать прямой отрезок, или круг, или эллипс, или восьмерку или другую фигуру Лиссажу.

Аналогичные 2-мерные и 3-мерные квантовые эффекты проявляются у всех ХБЧ любого масштаба. В этом содержится основная идея безмассовой стохастической квантовой механики (БСКМ): – «Изучая стохастические объекты макромира обычными (настольными) методами, мы одновременно можем получить информацию обо всех подобных объектах микромира и небесных тел космического масштаба.

Предложенный в данной работе подход позволил вывести уравнения нерелятивистской безмассовой стохастической квантовой механики (БСКМ) (39), (47), (89), (92) исходя из принципов в корне отличающихся от идейных устоев современных интерпретаций КМ: копенгагенской, многомировой согласованных хронологий, декогеренции и т.д., но математический аппарат БСКМ оказался полностью аналогичным математическому аппарату КМ.

Судя по всему, подобным образом могут быть получены многие другие уравнения квантовой теории поля, например: уравнение Клейна-Фока-

Гордона, уравнение Дирака, уравнения Максвелла и т. д. Возможно, что алгоритм их вывода аналогичен подходу, приведенному в данной работе:

- 1) записывается детерминистское действие системы;
- 2) из действия системы извлекается масса и получается «эффективность» этой системы;
- 3) эффективность системы усредняется;
- 4) все усредненные слагаемые в подынтегральном выражении усредненной «эффективности» представляются через ФПРВ $\rho(x)$;
- 5) производится перевод всех слагаемых лагранжиана усредненной «эффективности» системы в координатное представление;
- 6) определяется уравнение для экстремали получившегося функционала посредством методов вариационного исчисления.

Не исключено, что дальнейшие исследования подтвердят справедливость данного подхода к выводу уравнений теории поля.

Значимость приведенного здесь вывода стохастических уравнений БСКМ заключается в следующем:

- становится понятным, к каким явлениям микро- и макромира данные уравнения относятся, каковы границы и условия их применения в зависимости от масштабов рассматриваемых событий.

- отпала необходимость в привлечении «принципа неопределённости» Гейзенберга и представлений о «волнах материи» де Бройля, поскольку при выводе стохастических уравнений (39), (47), (89), (92) получена и применена процедура (П1.50) – (П1.54) полностью аналогичная переходу от координатного представления к импульсному, и наоборот, опираясь только на анализ свойств случайного процесса.

- отношение \hbar/m определяется через дисперсию и интервал корреляции исследуемого стационарного случайного процесса (41) или (П1.49). Поэтому стохастические уравнения Шредингера-Эйлера-Пуассона (39), (47), (89), (92)

не содержит «массу» частицы m , которую во многих случаях в принципе невозможно определить.

«Масса» является (*по мнению автора*) одной из самых «темных» размерных величин современной физики. В окончательной теории, по мнению автора, понятие «масса» должно отсутствовать, и данная статья – это один из шагов в направлении искоренения этого понятия из научных представлений об окружающей Реальности.

- возвращаются к рассмотрению объем и траектория блуждающей частицы. Вместе с ними физика микромира в интерпретации Эдварда Нельсона вновь приобретает привычную логическую «почву».

Надеемся, что если эта работа будет тщательно проанализирована и принята научным сообществом, то это позволит не только вычислять вероятностные исходы стохастических процессов, как микромира, так и макромира, но и задуматься над внутренней сутью этих процессов, как предлагал Альберт Эйнштейн в спорах с Нильсом Бором.

4 БЛАГОДАРНОСТИ

Автор М.С. Батанов, известен также под псевдонимом М.С. Батанов-Гаухман в честь семей, давших ему возможность выполнить предлагаемую здесь работу.

Благодарю Д. Рида и к.ф-м.н В. А. Лукьянова за ценные комментарии, сделанные при подготовке статьи. Также выражаю благодарность своим наставникам д.т.н А.А. Кузнецову и д.ф-м. н А.И. Козлову. Большую помощь в обсуждении этой статьи оказали д.ф-м.н А.А. Рухадзе, д.ф-м.н. А.М. Игнатов и Г.И. Шипов. Была важна поддержка к.пс.н. Т.С. Леви, А.Н. Маслова, А.Ю. Болотова. Замечания доктора Л. С. Ф. Олаво (Dr. L. S. F. Olavo) (*Бразильский университет*) и доктора Д. Эдвардса (Dr. D. Edwards) (*Университет штата Джорджия, США*) были полезны автору.

Приложение 1

П1 Определение ФПРВ производной дифференцируемого случайного процесса

Определение способа нахождения функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) производной случайного процесса при известной ФПРВ самого этого процесса является ключом к пониманию стохастической квантовой механики и границ ее применения. Решение данной задачи позволяет обосновать квантово-механическую процедуру перехода от координатного представления к импульсному представлению, и наоборот, без привлечения гипотезы о существовании волн материи Луи де Бройля.

Это становится возможным в силу того, что импульс частицы линейно связан с производной от ее координаты. Например, x -составляющая вектора импульса частицы, движущейся в направлении оси X со скоростью v_x , связана с первой производной по координате x соотношением

$$p_x = mv_x = m \partial x / \partial t = m x'. \quad (\text{П1.1})$$

Рассмотрим несколько реализаций случайного процесса $\zeta(t)$ (рис. П1.1)

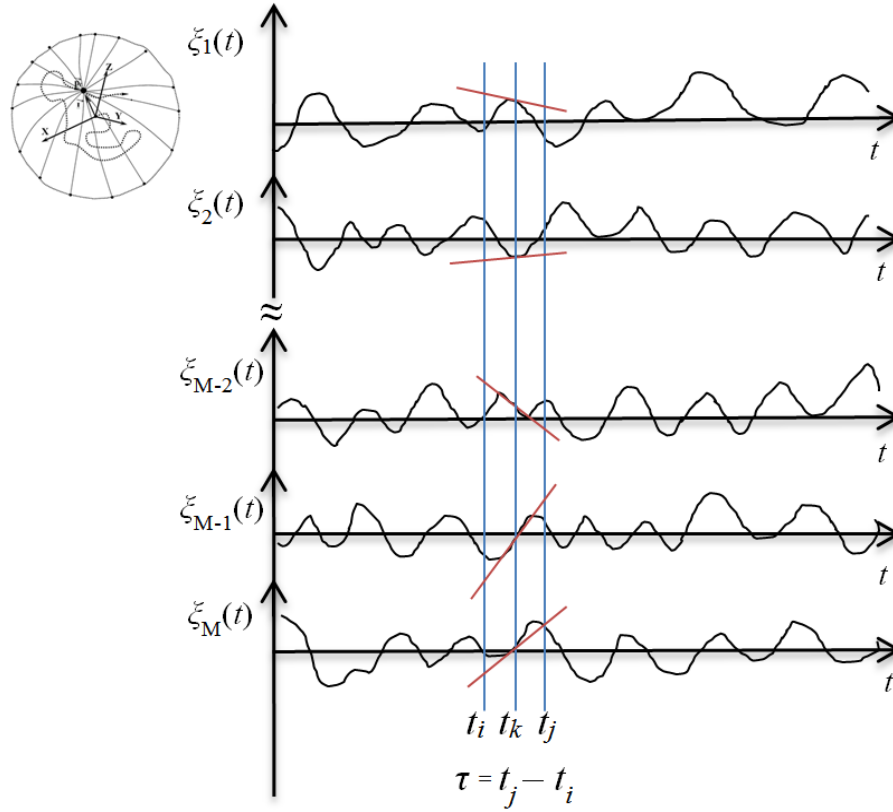


Рис. П1.1. Реализации дифференцируемого случайного процесса $\zeta(t)$. Данные реализации можно интерпретировать, например, как изменения со временем проекции места нахождения блуждающей частицы на ось X (рис. 1), т.е. $x(t) = \zeta(t)$

В общем случае этот процесс нестационарный, но будем исходить из того, что все усредненные характеристики этого процесса в сечении t_i незначительно отличаются от аналогичных его усредненных характеристик в сечении t_j . То есть потребуем, чтобы все начальные и центральные моменты этого процесса в сечении t_i были приближенно равны соответствующим начальным и центральным моментам в сечении t_j при $\tau = t_j - t_i$ стремящемуся к нулю. Например,

$$\overline{\xi(t_i)} \approx \overline{\xi(t_j)}; \quad \overline{\xi^2(t_i)} \approx \overline{\xi^2(t_j)} \text{ и т.д.} \quad (\text{П1.2})$$

Другими словами рассматриваемый случайный процесс $\zeta(t)$ либо стационарный (в узком смысле), либо близок к нему. Однако в каждом сечении t_m все усредненные характеристики такого процесса остаются неизменными.

Для удобства будем называть такой процесс «псевдо-стационарным случайным процессом» (ПССП).

Все выводы и заключения в отношении ПССП, сделанные в этом приложении, относятся и к стационарному случайному процессу (ССП).

Отметим вначале общие свойства первой производной ПССП $\xi(t)$. Из реализаций на рис. П1.1 видно, что величины $\xi(t_k)$ в сечении t_k и производные этого процесса в том же сечении $\xi'(t_k) = \frac{\partial \xi(t_k)}{\partial t}$ являются независимыми, а

следовательно, и некоррелированными, случайными величинами. Данное утверждение может быть выражено аналитически [18]

$$\langle \xi(t_k) \xi'(t_k) \rangle = \langle \frac{d}{dt} \frac{1}{2} [\xi(t_k)]^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle [\xi(t_k)]^2 \rangle = 0, \quad (\text{П1.3})$$

где $\langle \rangle$ означает усреднение по реализациям. Здесь учтено, что операции дифференцирования и усреднения в данном случае являются коммутативными, и что все усредненные характеристики ПССП в каждом его сечении являются постоянными величинами, в том числе $\langle [\xi(t_k)]^2 \rangle = \text{const}$.

Однако даже при статистической независимости случайных величин $\xi(t_k) = \xi_k$ и $\xi'(t_k) = \xi'_k$ некая связь между ФПРВ $\rho(\xi_k)$ и ФПРВ $\rho(\xi'_k)$ существует. Это вытекает из известной процедуры получения ФПРВ $\rho(\xi'_k)$ производной при известной двумерной ФПРВ случайного стационарного процесса [42, 43]

$$\rho(\xi_i, \xi_j) = \rho(\xi_i, t_i; \xi_j, t_j). \quad (\text{П1.4})$$

Для этого в выражении (П1.4) необходимо сделать замену переменных

$$\xi_i = \xi_k - \frac{\tau}{2} \xi'_k; \quad \xi_j = \xi_k + \frac{\tau}{2} \xi'_k; \quad t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \quad t_j = t_k + \frac{\tau}{2}, \quad (\text{П1.5})$$

где $\tau = t_j - t_i$; $t_k = \frac{t_j + t_i}{2}$, с якобианом преобразования $[J] = \tau$.

В результате из ФПРВ (П1.4) получим

$$\rho_2(\xi_k, \xi'_k) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau \rho_2\left(\xi_k - \frac{\tau}{2} \xi'_k, t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_k + \frac{\tau}{2} \xi'_k, t_k + \frac{\tau}{2}\right). \quad (\text{П1.6})$$

Далее, интегрируя полученное выражение по ξ_k , найдем искомую ФПРВ производной исходного процесса в сечении t_k [42, 43]:

$$\rho(\xi'_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi_k, \xi'_k) d\xi_k. \quad (\text{П1.7})$$

Формальная процедура (П1.4) – (П1.7) позволяет решить задачу определения ФПРВ $\rho(\xi')$ при известной двумерной ФПРВ (П1.4). Однако двумерные ФПРВ определены для ограниченного класса случайных процессов. Поэтому необходимо рассмотреть возможность получения ФПРВ $\rho(\xi')$ при известной одномерной ФПРВ $\rho(\xi)$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся следующими свойствами случайных процессов:

1. Двумерная ФПРВ любого случайного процесса может быть представлена в виде [42, 43]

$$\rho(\xi_i, t_i; \xi_j, t_j) = \rho(\xi_i, t_i) \rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i), \quad (\text{П1.8})$$

где $\rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i)$ – условная ФПРВ.

2. Для ПССП справедливо приближенное тождество

$$\rho(\xi_i, t_i) \approx \rho(\xi_j, t_j). \quad (\text{П1.9})$$

3. Условная ФПРВ случайного процесса при $\tau = t_i - t_j$ стремящейся к нулю вырождается в дельта-функцию

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i) = \delta(\xi_j - \xi_i). \quad (\text{П1.10})$$

На основании вышеперечисленных свойств, препарируем случайный процесс на участке $[t_i = t_k - \tau/2; t_j = t_k + \tau/2]$ при $\tau \rightarrow 0$ посредством следующей формальной процедуры.

ФПРВ $\rho(\xi_i) = \rho(\xi_i, t_i)$ в сечении t_i и ФПРВ $\rho(\xi_j) = \rho(\xi_j, t_j)$ в сечении t_j всегда можно представить в виде произведения двух функций

$$\rho(\xi_i) = \varphi(\xi_i)\varphi(\xi_i) = \varphi^2(\xi_i), \quad (\text{П1.11})$$

$$\rho(\xi_j) = \varphi(\xi_j)\varphi(\xi_j) = \varphi^2(\xi_j),$$

где $\varphi(\xi_i)$ – плотность амплитуды вероятности (ПАВ) случайной величины ξ_i в сечении t_i ; $\varphi(\xi_j)$ – ПАВ случайной величины ξ_j в сечении t_j .

Для ПССП справедливо приближенное выражение

$$\varphi(\xi_i) \approx \varphi(\xi_j), \quad (\text{П1.12})$$

в чем легко убедиться, взяв квадратный корень от обеих частей (П1.9).

Для ССП приближенное соотношение (П1.12) становится равенством

$$\varphi(\xi_i) = \varphi(\xi_j), \quad (\text{П1.12a})$$

Отметим, что приближенное выражение (П1.12) при $\tau \rightarrow 0$ для большинства нестационарных случайных процессов (в том числе для ПССП) так же превращается в равенство

$$\varphi(\xi_i, t_i) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \varphi(\xi_j, t_j = t_i + \tau). \quad (\text{П1.13})$$

При выполнении условия (П1.12) выражение (П1.8) может быть представлено в симметричном виде

$$\rho(\xi_i, \xi_j) \approx \varphi(\xi_i)\rho(\xi_j / \xi_i)\varphi(\xi_j), \quad (\text{П1.14})$$

где $\rho(\xi_j / \xi_i)$ – условная ФПРВ.

Запишем (П1.14) в развернутом виде

$$\begin{aligned} & \rho\left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}; \xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right] \approx \\ & \approx \left[\xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}\right] \rho\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2} / \xi_i, t_i = t_k - \frac{\tau}{2}\right] \varphi\left[\xi_j, t_j = t_k + \frac{\tau}{2}\right]. \end{aligned} \quad (\text{П1.15})$$

Устремим в выражении (П1.15) τ к нулю, но таким образом, чтобы данный интервал равномерно слева и справа стягивался в момент времени $t_k = (t_j - t_i)/2$, тогда с учетом (П1.10) из (П1.14) получим точное равенство

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(\xi_i, \xi_j) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \{\varphi(\xi_i)\rho(\xi_j / \xi_i)\varphi(\xi_j)\} = \varphi(\xi_{ik})\delta(\xi_{jk} - \xi_{ik})\varphi(\xi_{jk}), \quad (\text{П1.16})$$

где ξ_{ik} – результат стремления случайной величины $\xi(t_i)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ слева; ξ_{jk} – результат стремления случайной величины $\xi(t_j)$ к случайной величине $\xi(t_k)$ справа.

Проинтегрировав обе части выражения (П1.16) по ξ_{ik} и ξ_{jk} , получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \delta(\xi_{jk} - \xi_{ik}) \varphi(\xi_{jk}) d\xi_{ik} d\xi_{jk} = 1. \quad (\text{П1.17})$$

Выражение (П1.17) является формальным математическим тождеством из теории обобщенных функций, учитывающим свойства дельта-функции (δ -функции). Для того, чтобы наполнить выражение (П1.17) физическим содержанием, необходимо задать конкретный вид δ -функции.

Определим вид δ -функции для марковского случайного процесса. Рассмотрим непрерывный случайный марковский процесс, для которого справедливо уравнение Фоккера - Планка

$$\frac{\partial \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial t} = B \frac{\partial^2 \rho(\xi_j / \xi_i)}{\partial \xi^2}, \quad (\text{П1.18})$$

где B – коэффициент диффузии.

Это дифференциальное уравнение параболического типа имеет три решения, одно из которых может быть представлено в виде [42, 43]

$$\rho(\xi_j, t_j / \xi_i, t_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_j - \xi_i) - q^2 B(t_j - t_i)\} dq, \quad (\text{П1.19})$$

где q – обобщенная частота.

При $\tau = t_j - t_i \rightarrow 0$ из (П1.19) получим одно из определений δ -функции

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \rho(\xi_j / \xi_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dq = \delta(\xi_j - \xi_i). \quad (\text{П1.20})$$

Поскольку данный результат получен для предельного случая $\tau \rightarrow 0$, то не исключено, что δ -функция (П1.20) может соответствовать не только диффузионному марковскому случайному процессу, но и многим другим стационарным и нестационарным случайным процессам. Другими словами можно было сразу предположить что δ -функция для ПССП имеет вид (П1.20) не обращаясь к уравнению Фоккера - Планка (П1.18).

Подставив полученную δ -функцию (П.1.20) в выражение (П.1.17), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(\xi_{jk} - \xi_{ik})\} dq \right] \varphi(\xi_{jk}) d\xi_{ik} d\xi_{jk} = 1. \quad (\text{П.1.21})$$

Поменяв в (П.1.21) порядок интегрирования, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{ik}) \exp\{-iq\xi_{ik}\} d\xi_{ik} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_{jk}) \exp\{iq\xi_{jk}\} d\xi_{jk} \right] dq = 1. \quad (\text{П.1.22})$$

Учтем, что согласно (П.1.13), для ПССП и ССП выполняется условие $\varphi(\xi_{ik}) = \varphi(\xi_{jk})$. Поэтому выражение (П.1.22) принимает вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(q) \varphi^*(q) dq = 1, \quad (\text{П.1.23})$$

где
$$\varphi(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{-iq\xi_k\} d\xi_k, \quad (\text{П.1.24})$$

$$\varphi^*(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi_k) \exp\{iq\xi_k\} d\xi_k. \quad (\text{П.1.25})$$

Подынтегральное выражение $\varphi(q)\varphi^*(q)$ в интеграле (П.1.23) отвечает всем требованиям ФПРВ $\rho(q)$ случайной величины q :

$$\rho(q) = \varphi(q)\varphi^*(q) = |\varphi(q)|^2. \quad (\text{П.1.26})$$

Выясним теперь, что представляет собой случайная величина q .

Особенности рассматриваемого случайного процесса накладывают на обобщенную частоту q следующие ограничения:

- 1) q должна быть случайной величиной.
- 2) случайная величина q должна характеризовать случайный процесс в исследуемом интервале $\tau = t_j - t_i$ (рис. П.1.1) при $\tau \rightarrow 0$;
- 3) величина q должна принадлежать множеству действительных чисел

($q \in R'$), имеющему мощность континуума, т. е. q должна иметь возможность принимать любое значение из диапазона $]-\infty, \infty[$.

Всем трем требованиям удовлетворяют любая из следующих случайных величин, связанных с ПССП (или ССП) на исследуемом временном интервале τ :

$$\xi'_i = \frac{\partial \xi_k}{\partial t}, \quad \xi''_i = \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial t^2}, \quad \dots, \quad \xi^{(n)}_i = \frac{\partial^n \xi_k}{\partial t^n}. \quad (\text{П1.27})$$

Однако эти случайные величины характеризуют ПССП (или ССП) не в равной степени. Рассмотрим одну из реализаций исследуемого процесса. Функция $\xi(t)$ (рис. П1.1) в интервале $\tau = t_j - t_i$ при $\tau < \tau_{\text{кор}}$ (где $\tau_{\text{кор}}$ – интервал корреляции случайного процесса) может быть разложена в ряд Тейлора-Маклорена

$$\xi(t_j) = \xi(t_i) + \xi'(t_i)\tau + \frac{\xi''(t_i)}{2}\tau^2 + \dots + \frac{\xi^{(n)}(t_i)}{n!}\tau^n + \dots \quad (\text{П1.28})$$

Запишем выражение (П1.28) в следующем виде

$$\frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi'_i + \frac{\xi''_i}{2!}\tau + \dots + \frac{\xi^{(n)}_i}{n!}\tau^{n-1} + \dots \quad (\text{П1.29})$$

где $\xi(t_i) = \xi_i$, $\xi(t_j) = \xi_j$.

Так же как в (П1.20), устремим τ к нулю, при этом (П1.29) сводится к тождеству

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\xi_j - \xi_i}{\tau} = \xi'_k, \quad (\text{П1.30})$$

где $\xi_k = \xi(t_k)$ (смотрите рис. П1.1).

Таким образом, единственной случайной величиной, удовлетворяющей всем вышеперечисленным требованиям на исследуемом временном интервале $[t_i = t_k - \tau/2; t_j = t_k + \tau/2]$, при $\tau \rightarrow 0$, является первая производная исходного случайного процесса $\xi'_k = \xi'(t_k)$ в сечении t_k . Следовательно, остается положить, что случайная величина q в выражениях (П1.23) – (П1.26) линейно связана только с ξ'_k , т. е.

$$q = \frac{\xi'_k}{\eta}, \quad (\text{П1.31})$$

где $1/\eta$ – размерный коэффициент пропорциональности.

Дополнительный аргумент: каждой экспоненте, например, из интеграла (П1.24) соответствует гармоническая функция с частотой q

$$\exp\{-iq\xi(t)\} \rightarrow \xi_k(t) = A \sin(qt), \quad (\text{П1.32})$$

это одна из гармонических составляющих случайного процесса $\xi(t)$. При этом каждой частоте q , в свою очередь, соответствует тангенс угла наклона касательной линии к гармонической функции с данной частотой (рис. П1.2), то есть $q \sim \operatorname{tg} \alpha = \xi'_k(t)$. Действительно, продифференцировав гармоническую функцию (П1.32), получим связь $\xi'_k(t) = qA \cos(qt)$, откуда следует

$$q = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\xi'_k}{A \cos(qt)} = \frac{\xi'_k}{A}. \quad (\text{П1.33})$$

При $A = \eta$, выражения (П1.31) и (П1.33) совпадают.

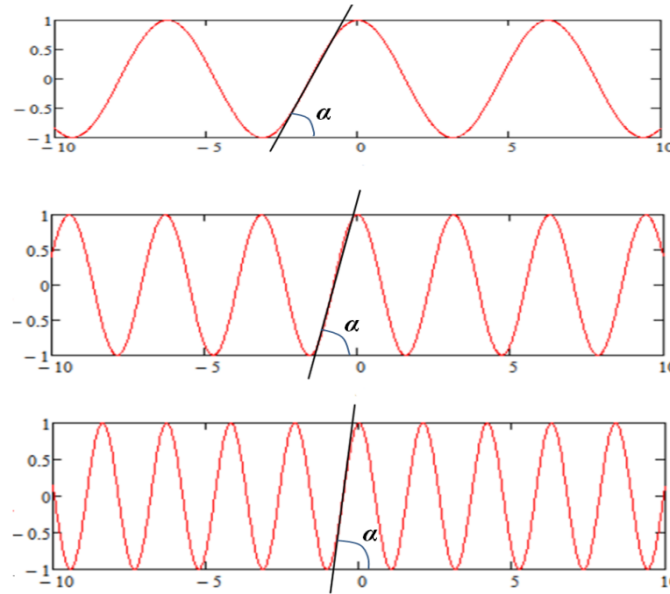


Рис. П1.2. Чем больше частота гармонической функции, тем больше угол α между касательной к этой функции и осью t

Подставляя (П1.31) в (П1.23) – (П1.26), получим следующую искомую процедуру получения ФПРВ производной $\rho(\xi', t)$ псевдо-стационарного случайного процесса (ПССП) $\xi(t)$ в любом сечении t_k при известной одномерной ФПРВ $\rho(\xi, t)$ в том же сечении:

1. Заданная одномерная ФПРВ $\rho(\xi, t)$ представляется в виде произведения двух ПАВ $\varphi(\xi)$:

$$\rho(\xi, t) = \varphi(\xi, t) \varphi(\xi, t). \quad (\text{П1.34})$$

2. Осуществляются два преобразования Фурье

$$\varphi(\xi', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, t) \exp\{i\xi'\xi/\eta\} d\xi, \quad (\text{П1.35})$$

$$\varphi^*(\xi', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi, t) \exp\{-i\xi'\xi/\eta\} d\xi. \quad (\text{П1.36})$$

3. Окончательно для произвольного сечения ПССП (или ССП) получим искомую ФПРВ производной

$$\rho(\xi', t) = \varphi(\xi', t) \varphi^*(\xi', t) = |\varphi(\xi', t)|^2. \quad (\text{П1.37})$$

Еще раз отметим, что процедура (П1.34) – (П1.37) может быть применима, к любым стационарным и псевдо-стационарным случайным процессам {т.е. случайным процессам с медленно изменяющейся со временем ФПРВ $\rho(\xi, t)$ }, для которых при $\tau \rightarrow 0$ δ -функция принимает вид (П1.20).

Для выяснения физического смысла величины η воспользуемся сравнением с известными результатами. Данный подход небезупречен с точки зрения математической строгости, но позволяет достаточно эффективно получить конкретный, практически важный результат.

Рассмотрим стационарный гауссовский случайный процесс $\xi(t)$. При этом в каждом сечении этого процесса случайная величина ξ распределена по гауссовому закону:

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \exp\{-(\xi - a_\xi)^2 / 2\sigma_\xi^2\}, \quad (\text{П1.38})$$

где σ_ξ^2 и a_ξ – дисперсия и математическое ожидание данного процесса $\xi(t)$.

Осуществляя с ФПРВ (П1.38) последовательность операций (П1.34) – (П1.37), получим ФПРВ производной этого случайного процесса

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi[\eta/2\sigma_\xi]^2}} \exp\left\{-\frac{\xi'^2}{2[\eta/2\sigma_\xi]^2}\right\}. \quad (\text{П1.39})$$

С другой стороны, с помощью известной процедуры (П1.4) – (П1.7) для аналогичного случая получим [43]

$$\rho(\xi') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\xi'}^2}} \exp\left\{-\xi'^2 / 2\sigma_{\xi'}^2\right\}, \quad (\text{П1.40})$$

где $\sigma_{\xi'} = \sigma_\xi / \tau_{\text{cor}}$,

здесь τ_{cor} – интервал автокорреляции исходного случайного процесса $\xi(t)$.

Сравнивая ФПРВ (П1.39) и (П1.40), находим, что при

$$\eta = \frac{2\sigma_\xi^2}{\tau_{\xi \text{ cor}}} \quad (\text{П1.41})$$

они полностью совпадают.

Выражение (П1.41) получено для гауссовского случайного процесса, но среднеквадратическое отклонение σ_ξ и интервал автокорреляции $\tau_{\xi \text{ cor}}$ – это основные характеристики любого стационарного случайного процесса. Все остальные начальные и центральные моменты в случае негауссового распределения случайной величины $\xi(t)$ дадут незначительный вклад в выражение (П1.41). Поэтому с высокой степенью достоверности можно утверждать, что выражение (П1.41) применимо для большого класса стационарных и псевдо-стационарных случайных процессов.

В квантовой механике для перехода от координатного представления волновой функции пико-частицы к ее импульсному представлению применяется процедура

$$\varphi(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{ip_x x / \hbar\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{imx'x / \hbar\} dx, \quad (\text{П1.42})$$

$$\varphi^*(p_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{-ip_x x / \hbar\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{-imx'x / \hbar\} dx, \quad (\text{П1.43})$$

где $\hbar = 1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж/Гц – редуцированная постоянная Планка, а так же учтено, что x -компонента импульса частицы p_x связана с ее скоростью v_x (т.е. производной ее координаты по времени)

$$p_x = mv_x = m \frac{dx}{dt} = mx', \quad (\text{П1.45})$$

В случае когда

$$\eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{x\text{cor}}} = \frac{\hbar}{m} \text{ с размерностью (м}^2\text{/с)}, \quad (\text{П1.46})$$

процедуры (П1.34) – (П1.37) и (П1.42) – (П1.43) полностью совпадают.

Из выражения (П1.46) следует, что постоянная Планка может быть выражена через основные усредненные параметры стационарного (или псевдо-стационарного) случайного процесса σ_x и $\tau_{x\text{cor}}$, в котором участвует хаотически блуждающая пико-частица (например, электрон).

Вместе с тем область применения процедуры (П1.42) – (П1.43) ограничена малостью редуцированной постоянной Планка \hbar , тогда как процедура (П1.34) – (П1.37) может быть применена для случайных стационарных и псевдо-стационарных процессов любого масштаба. К таким случайным процессам можно отнести хаотические колебания центра масс ядра биологической клетки, хаотические перемещения кончика ветки дерева, хаотическое изменение места положения центра масс ядра планеты и т.д.

Отметим следующие промежуточные результаты:

1]. Для стационарного и псевдо-стационарного случайного процесса $\zeta(t) = x(t)$ может быть применима следующая процедура получения ФПРВ $\rho(x')$ производной этого процесса.

Заданная одномерная ФПРВ $\rho(x)$ стационарного процесса (или медленно изменяющаяся ФПРВ $\rho(x, t)$ псевдо-стационарного процесса) представляется в виде произведения двух ПАВ $\varphi(x)$ или $\varphi(x, t)$:

$$\rho(x) = \varphi(x)\varphi^*(x) \quad \text{или} \quad \rho(x, t) = \varphi(x, t)\varphi^*(x, t). \quad (\text{П1.47})$$

а) Для стационарного случайного процесса осуществляются два преобразования Фурье

$$\varphi(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{ix'x/\eta_x\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{iv_x x/\eta_x\} dx, \quad (\text{A1.48})$$

$$\varphi^*(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{-ix'x/\eta_x\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \exp\{-iv_x x/\eta_x\} dx. \quad (\text{A1.49})$$

и определяется искомая ФПРВ производной данного процесса

$$\rho(x') = \varphi(x')\varphi^*(x') = |\varphi(x')|^2. \quad (\text{П1.50})$$

$$\text{или} \quad \rho(v_x) = \varphi(v_x)\varphi^*(v_x) = |\varphi(v_x)|^2 \quad (\text{П1.51})$$

$$\text{где} \quad \eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{x\text{кор}}} = \frac{\hbar}{m} \quad (\text{П1.52})$$

σ_x – среднеквадратичное (стандартное) отклонение исходного стационарного случайного процесса $x(t)$ от среднего значения;

$\tau_{x\text{кор}}$ – интервал автокорреляции данного процесса.

В § 2.6 статьи [44, [arXiv:2007.13527](https://arxiv.org/abs/2007.13527)] применена процедура (П1.47) – (П1.51) для получения ФПРВ $\rho(x')$ производной стационарных случайных процессов с законами распределения: Гаусса, равномерным, Лапласа, Коши и синусоидальным.

б) Для псевдо-стационарного случайного процесса выполняются два преобразования Фурье

$$\varphi(x', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) \exp\{ix'x/\eta_x(t)\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) \exp\{iv_x x/\eta_x(t)\} dx, \quad (\text{A1.53})$$

$$\varphi^*(x', t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) \exp\{-ix'x/\eta_x(t)\} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta_x(t)}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) \exp\{-iv_x x/\eta_x(t)\} dx. \quad (\text{A1.54})$$

и определяется искомая ФПРВ производной данного процесса в каждый момент времени t

$$\rho(x', t) = \varphi(x', t) \varphi^*(x', t) = |\varphi(x', t)|^2. \quad (\text{П1.55})$$

$$\text{или} \quad \rho(v_x, t) = \varphi(v_x, t) \varphi^*(v_x, t) = |\varphi(v_x, t)|^2 \quad (\text{П1.56})$$

$$\text{где} \quad \eta_x(t) = \frac{2\sigma_x^2(t)}{\tau_{x\text{cor}}(t)} = \frac{\hbar}{m(t)} \quad (\text{П1.57})$$

$\sigma_x(t)$ – среднеквадратичное (стандартное) отклонение исходного псевдо-стационарного случайного процесса $x(t)$ от его среднего значения в момент времени t ;

$\tau_{x\text{cor}}(t)$ – интервал автокорреляции данного процесса в момент времени t .

2]. Процедура (П1.47) – (П1.52) с точностью до коэффициента пропорциональности η совпадает с квантово-механической процедурой (П1.42) – (П1.43) перехода от координатного представления к импульсному. Но квантово-механическая процедура (П1.42) – (П1.43) получена с привлечением весьма неочевидной (экзотической) гипотезы о возможном существовании волн материи Луи де Бройля (которые так и не были обнаружены). Тогда как процедура (П1.47) – (П1.52) получена на основании подробного анализа дифференцируемого случайного процесса с единственным предположением (который может быть подвергнут сомнению), что дельта-функция $\delta(x_j - x_i)$ имеет вид (П1.20). В связи с этим интересно проанализировать, к каким процедурам перехода от ФПРВ $\rho(x)$ к ФПРВ $\rho(x')$ могут привести другие виды δ -функции?

Также нет необходимости использовать гипотезу Луи де Бройля о существовании волн материи для описания дифракции частиц на кристалле. В статье [44, [arXiv:2007.13527](https://arxiv.org/abs/2007.13527)] показано, что на основании законов геометрической оптики и теории вероятностей получена формула для расчёта объем-

ных диаграмм рассеяния частиц на многослойной периодической поверхности кристалла.

3] В случае изучения хаотического поведения пико-частиц, отношение \hbar/m может быть выражено через основные характеристики исследуемого случайного процесса (П1.46). На взгляд автора, это очень важный результат, т.к. оценить реальную массу подвижной элементарной частицы практически не возможно. Напомним, что в физических справочниках приведены только массы покоя элементарных частиц, которые определены косвенно на основании сложных экспериментов. Тогда как получить оценку стандартного отклонения σ_x и интервала автокорреляции $\tau_{x\text{ cor}}$ случайно блуждающей частицы гораздо проще. Важно так же, что редуцированная постоянная Планка \hbar теряет фундаментальный характер и оказывается размерным коэффициентом пропорциональности между массой частицы и отношением усредненных характеристик случайного процесса $\sigma_{\text{эчх}}$ и $\tau_{\text{эчх}}$, в котором эта частица участвует.

Приложение 2

П.2 Координатное представление усредненной скорости хаотически блуждающей частицы

Для стационарного и псевдо-стационарного случайных процессов (смотрите Приложение 1) докажем справедливость равенств (П2.1)

$$\overline{x'^n} = \overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x') x'^n dx'_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v_x) v_x^n dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(v_x) v_x^n \psi^*(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) dx,$$

$$\overline{x'^n(t)} = \overline{v_x^n(t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x', t) x'^n dx'_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(v_x, t) v_x^n dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \left(-i\eta_x(t) \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x, t) dx, \quad (\text{П2.2})$$

где n – целая, положительная степень; η_x – масштабный параметр (А1.52).

Специалистам в области квантовой механики хорошо известно доказательство аналогичного выражения

$$\overline{p_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(p_x) p_x^n dp_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(p_x) p_x^n \psi(p_x) dp_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) dx,$$

смотрите, например, [45]. Однако в виду важности данного доказательства для данной статьи приведем его в несколько измененном виде, применительно к особенностям безмассовой стохастической квантовой механики.

Воспользуемся преобразованиями Фурье (П1.48) и (П1.48)

$$\psi(v_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{i \frac{v_x x}{\eta_x}}}{(2\pi\eta_x)^{1/2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{i \frac{p_x x}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^{1/2}} dx, \quad (\text{П2.3})$$

$$\psi^*(v_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{-i \frac{v_x x}{\eta_x}}}{(2\pi\eta_x)^{1/2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \frac{e^{-i \frac{p_x x}{\hbar}}}{(2\pi\hbar)^{1/2}} dx, \quad (\text{П2.4})$$

Подставим интегралы (П2.3) и (П2.4) в третью часть равенства (П2.1)

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) \frac{e^{-i \frac{v_x x_i}{\eta_x}}}{(2\pi\eta_x)^{1/2}} dx_i v_x^n \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_j) \frac{e^{i \frac{v_x x_j}{\eta_x}}}{(2\pi\eta_x)^{1/2}} dx_j \right] dp_x. \quad (\text{П2.5})$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что

$$v_x^n e^{i \frac{v_x x_j}{\eta_x}} = \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n e^{i \frac{v_x x_j}{\eta_x}}, \text{ или } p_x^n e^{i \frac{p_x x_j}{\hbar}} = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n e^{i \frac{p_x x_j}{\hbar}}. \quad (\text{П2.6})$$

Перепишем (П2.5) с учетом (П2.6)

$$\overline{v_x^n} = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) e^{-i \frac{v_x x_i}{\eta_x}} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_j) \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n e^{i \frac{v_x x_j}{\eta_x}} dx_j \right] dv_x. \quad (\text{П2.7})$$

Проинтегрируем второй интеграл в подынтегральном выражении n раз по частям, при этом будем предполагать, что $\psi(x)$ и ее производные обращаются в нуль на границах интегрирования $x = \pm \infty$. Выполняя данные действия, получим [45]

$$\overline{v_x^n} = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) e^{-i\frac{v_x x_j}{\eta_x}} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{v_x x_j}{\eta_x}} \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \psi(x_j) dx_j \right] dv_x, \quad (\text{П2.8})$$

или
$$\overline{v_x^n} = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \psi(x_i) e^{i\frac{v_x(x_j-x_i)}{\eta_x}} \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \psi(x_j) \right] dv_x. \quad (\text{П2.9})$$

Изменим в (П2.9) порядок интегрирования, т.е. сначала будем интегрировать по v_x [45]

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} dx_j \psi(x_i) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \psi(x_j) \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{v_x(x_j-x_i)}{\eta_x}} dv_x.$$

В том выражении присутствует дельта-функция

$$\delta(x_j - x_i) = \frac{1}{2\pi\eta_x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{v_x(x_j-x_i)}{\eta_x}} dv_x. \text{ типа } \delta(x_j - x_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iq(x_j-x_i)} dq. \quad (\text{П2.10})$$

Поэтому представим его в виде

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x_i) \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \psi(x_j) \delta(x_j - x_i) dx_j. \quad (\text{П2.11})$$

Используя свойства δ -функции окончательно запишем [45]

$$\overline{v_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) \left(-i\eta_x \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x) dx, \quad (\text{П2.12})$$

таким образом, выражение (П2.1) доказано для случая стационарного случайного процесса (ССП).

Для псевдо-стационарного случайного процесса (ПССП) выражение (П2.2) доказывается аналогично. Выполняя операции подобные (П2.5) – (П2.15) с использованием преобразований (П1.53) и (П1.54), получим

$$\overline{v_x^n}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \left(-i\eta_x(t) \frac{\partial}{\partial x} \right)^n \psi(x, t) dx, \quad (\text{П2.13})$$

Вернемся к рассмотрению условной ФПРВ (П1.19)

$$\rho(x_j, t_j / x_i, t_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{iq(x_j - x_i) - q^2 B(t_j - t_i)\} dq, \quad (\text{П2.14})$$

где согласно (П1.31) $q = \frac{x'}{\eta_x} = \frac{v_x}{\eta_x}$.

При $\Delta x = x_j - x_i \rightarrow 0$ из (П2.14) получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho(x_j, t_j / x_i, t_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\frac{v_x^2}{\eta_x^2} B(t_j - t_i)\} dv_x. \quad (\text{П2.15})$$

Учтем, что

$$\frac{v_x^2}{2} = t_x = \varepsilon_x, \quad (\text{П2.16})$$

где t_x – кинетическая энергетичность (21), равная полной механической энергетичности ε_x (19) при отсутствии потенциальной энергетичности u_x (20) (т.е. при $u_x = 0$).

Для некоторых стохастических процессов следует положить, что коэффициент диффузии B является комплексным числом, т.е. $B = iD$. В этом случае выражение (П2.15) с учетом (П2.16) приобретает вид δ_ε -функции

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \rho(x_j, t_j / x_i, t_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_x}} \exp\{-i \frac{\varepsilon_x}{\eta_x^2} 2D(t_j - t_i)\} d\varepsilon_x = \delta_\varepsilon(t_j - t_i). \quad (\text{П2.17})$$

Подставим данную δ_ε -функцию в выражение подобное (П1.17)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t_{ik}) \delta_\varepsilon(t_j - t_i) \varphi(x, t_{jk}) dt_{ik} dt_{jk} = 1. \quad (\text{П2.18})$$

Отметим, что для получения выражения (П2.18) необходимо рассматривать эволюцию случайного процесса не во времени (как это показано на рис. П1.1), а в пространстве. Это подобно фейнмановским всевозможным хаотическим траекториям движения частицы при ее перемещении из одной точки пространства в другую [46].

Из выражения (П2.18) по аналогии с (А1.22) – (А1.25) следуют преобразования Фурье

$$\varphi(\varepsilon_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\eta_x^2}{D}}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) \exp\{i\varepsilon_x t \frac{2D}{\eta_x^2}\} dt, \quad (\text{П2.19})$$

$$\varphi^*(\varepsilon_x) = \frac{1}{\sqrt{\pi \frac{\eta_x^2}{D}}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) \exp\{-i\varepsilon_x t \frac{2D}{\eta_x^2}\} dt. \quad (\text{П2.20})$$

Учитывая

$$\varepsilon_x^n e^{i\varepsilon_x t \frac{2D}{\eta_x^2}} = \left(-i \frac{\eta_x^2}{2D} \frac{\partial}{\partial t} \right)^n e^{i\varepsilon_x t \frac{2D}{\eta_x^2}}, \quad (\text{П2.21})$$

можно показать, что усредненное изменение кинетической энергетичности частицы, участвующей в ПССП, имеет вид

$$\overline{d\varepsilon_x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\varepsilon_x) d\varepsilon_x^n = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\varepsilon_x) d\varepsilon_x^n \psi^*(\varepsilon_x) d\nu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \left(-i \frac{\eta_x^2}{2D} \frac{\partial}{\partial t} \right)^n \psi(x, t) dx, \quad (\text{П2.22})$$

а при $n = 1$, имеем

$$\overline{d\varepsilon_x} = -i \frac{\eta_x^2}{2D} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} dx. \quad (\text{П2.23})$$

Доказательство справедливости выражения (П2.22) подобно доказательству выражения (П2.2). Аналогичность этих доказательств вытекает уже из симметрии между $p_x x$ и Et (или $v_x x$ и εt) в волне де Бройля

$$\psi = \exp\{-i(p_x x - Et)/\hbar\} = \exp\{-i(v_x x - \varepsilon t)/\hbar\} = \exp\{-i(v_x x - \varepsilon t)\eta_x\}. \quad (\text{П2.24})$$

В случае, когда масштабный параметр меняться со временем $\eta_x(t)$, то можно записать

$$\overline{d\varepsilon_x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, t) \left(-\frac{i}{2D} \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta_x^2(t) \psi(x, t) dx, \quad (\text{П2.25})$$

Вместе с тем возможна ситуация, когда дисперсия изменяются со временем по закону $\sigma_x^2(t - t_0)$, и коэффициент автокорреляции изменяется по тому же закону $\tau_{x \text{ cor}}(t - t_0)$. Тогда

$$\eta_x(t) = \frac{2\sigma_x^2(t)}{\tau_{xкор}(t)} \approx \frac{2\sigma_x^2(t-t_0)}{\tau_{xкор}(t-t_0)} \approx \eta_x = \frac{2\sigma_x^2}{\tau_{xкор}} = const. \quad (\text{П2.26})$$

В этом случае (П2.25) вновь приобретает вид (П2.23).

Приложение 3

П3 Квантованные состояния ядра биологической клетки

Безмассовая стохастическая квантовая механика (БСКМ), предлагаемая в этой статье, пригодна для описания квантовых эффектов не только на уровне элементарных частиц, но и на микро- и макроуровнях окружающего нас мира. В качестве примера используем уравнение (47) для исследования усредненного поведения хаотически колеблющегося ядра биологической клетки (смотрите рис. П3.1).

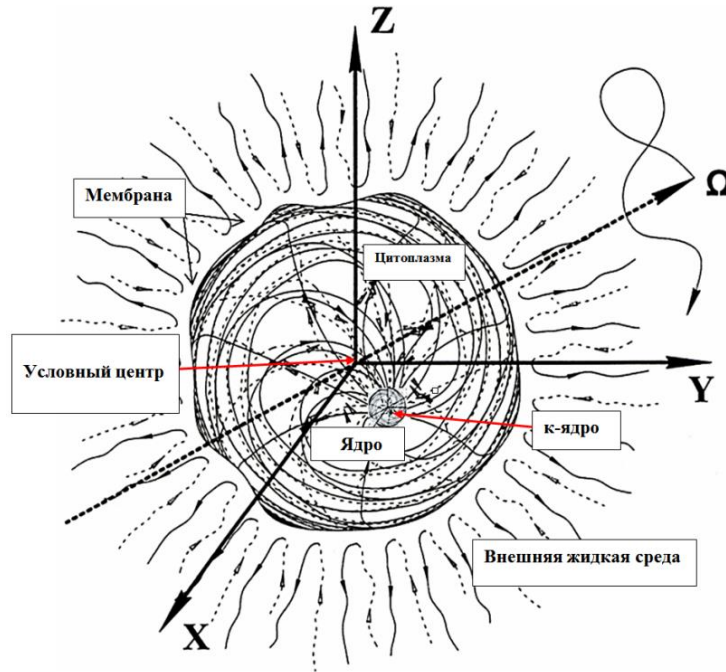


Рис. П3.1. Упрощенная модель эукариотической биологической клетки с явно выраженным клеточным ядром (к-ядром), которое непрерывно хаотически блуждает в окрестности условного центра, таким образом, что ее полная механическая энергия E (точнее энергетичность ε) всегда остается постоянной ($E = m\varepsilon = const$)

Рассмотрим живую эукариотическую биологическую клетку в период между ее делением (т.е. в состоянии интерфазы).

Пусть состояние интерфазы рассматриваемой клетки продолжается весь период наблюдения за хаотически колеблющимся клеточным ядром (далее к-ядром). При этом полная механическая энергетичность к-ядра остается постоянной

$$\varepsilon_n = t_n(x, y, z, t) + u_n(x, y, z, t) = \text{const}, \quad (\text{ПЗ.1})$$

где $\varepsilon_n = E_n(x, y, z, t)/m_n$ – полная механическая энергетичность к-ядра (здесь

m_n – масса к-ядра);

$t_n(x, y, z, t) = T_n(x, y, z, t)/m_n$ – кинетическая энергетичность к-ядра;

$u_n(x, y, z, t) = U_n(x, y, z, t)/m_n$ – потенциальная энергетичность к-ядра.

Рассматриваемый случайный процесс с участием к-ядра полностью соответствует стохастической модели, описанной в § 2.1, а условие (ПЗ.1) совпадает с условием (46). Поэтому для описания усредненных состояний хаотически колеблющегося к-ядра может быть использовано безмассовое стационарное стохастическое уравнение Шредингера-Эйлера-Пуассона (47)

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) + \frac{2}{\eta_{n1}^2} [\varepsilon_n - u_n(x, y, z)] \psi(x, y, z) = 0, \quad (\text{ПЗ.2})$$

где

$$\eta_{n1} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{2\sigma_{nr}^2}{\tau_{nr}}} \quad (\text{ПЗ.3})$$

– масштабный параметр;

$$\sigma_{nr} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_{nx}^2 + \sigma_{ny}^2 + \sigma_{nz}^2} \quad (\text{ПЗ.4})$$

– среднеквадратичное отклонение хаотически колеблющегося к-ядра от условного центра (рис. ПЗ.1);

$$\tau_{nr} = \frac{1}{3} (\tau_{nx} + \tau_{ny} + \tau_{nz}) \quad (\text{ПЗ.5})$$

- усредненный интервал автокорреляции рассматриваемого трехмерного стационарного случайного процесса, в котором участвует хаотически колеблющееся к-ядро.

Рассмотрим случай, когда упругие натяжения цитоплазмы σ_v , окружающей к-ядро, в среднем увеличиваются пропорционально удалению к-ядра от условного центра

$$\sigma_v(x) \approx k_u r, \quad (\text{ПЗ.6})$$

где $k_u = K_u/m_n$ – безмассовый коэффициент упругого натяжения цитоплазмы (K_u – силовая константа цитоплазмы), $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – расстояние от условного центра до к-ядра (рис. ПЗ.1);

В этом случае усредненная потенциальная энергетичность к-ядра может быть приближенно представлена в виде

$$u_n(r) \approx \int k_{ux} r dr = \frac{1}{2} k_u r^2. \quad (\text{ПЗ.7})$$

Подставляя выражение (ПЗ.7) в уравнение (ПЗ.2), получим известное в квантовой механике уравнение изотропного трехмерного гармонического осциллятора [47]

$$\nabla^2 \psi(r) + \frac{2}{\eta_{nr1}^2} [\varepsilon_n - \frac{k_u r^2}{2}] \psi(r) = 0, \quad (\text{ПЗ.8})$$

где
$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\nabla_{\theta,\varphi}^2}{r^2} \quad (\text{ПЗ.9})$$

– оператор Лапласа в сферических координатах, где оператор $\nabla_{\theta,\varphi}^2$ задается выражением (64);

Решениями данного уравнения являются волновые функции [47]

$$\psi_{klm}(r, \theta, \varphi) = R_k(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi} \left(\frac{\sqrt{k_u}}{2\eta_{n1}} \right)^3 \frac{2^{k+2l+3} k!}{(2k+2l+1)!!} \left(\frac{\sqrt{k_u}}{2\eta_{n1}} \right)^l} r^l \exp\left\{ -\frac{\sqrt{k_u} r^2}{2\eta_{n1}} \right\} \times$$

$$\times L_l^{(l+1/2)} \left(2 \sqrt{\frac{\sqrt{k_u}}{2\eta_{n1}}} r^2 \right) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

(П3.10)

где $L_l^{(l+1/2)} \left(2 \sqrt{\frac{\sqrt{k_u}}{2\eta_{n1}}} r^2 \right)$ – обобщенные полиномы Лагерра;

$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} e^{im\varphi} P_{lm}(\cos\theta)$ – сферические гармонические функции;

$P_{lm}(\cos\theta) = \frac{d}{2^l l!} (1 - \xi^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2 - 1)^l$ – присоединенные функции

Лежандра;

$\xi = \cos\theta$;

l – орбитальное квантовое число;

m – периферийное квантовое число.

В атомной квантовой физике число m называют «магнитным квантовым числом», но это название не подходит для стохастической квантовой механики. Поэтому в данной статье число m предложено называть «периферийным квантовым числом».

Волновые функции (П3.10) соответствуют собственным значениям полной механической энергетичности к-ядра [47]

$$\varepsilon_{nkl} = \eta_{nr1} \sqrt{k_{ur}} \left(2k + l + \frac{3}{2} \right) = \eta_{nr1} \sqrt{k_{ur}} \left(N + \frac{3}{2} \right), \quad (\text{П3.11})$$

где $N = 2k + l$.

Квадраты модуля волновых функций (131) $|\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)|^2$ (т.е. ФПРВ возможного места нахождения к-ядра внутри биологической клетки) при $\varphi = 0$ и различных значениях квантовых чисел k, l и m показаны на рис. П3.2.

Из рис. ПЗ.2 видно, что каждому набору из трех квантовых чисел k , l и m соответствует уникальная пространственная конфигурация усредненного состояния хаотического дрожания к-ядра. Это состояние определяется ФПРВ $|\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)|^2$ места возможного появления к-ядра (точнее его центра масс), внутри биологической клетки).

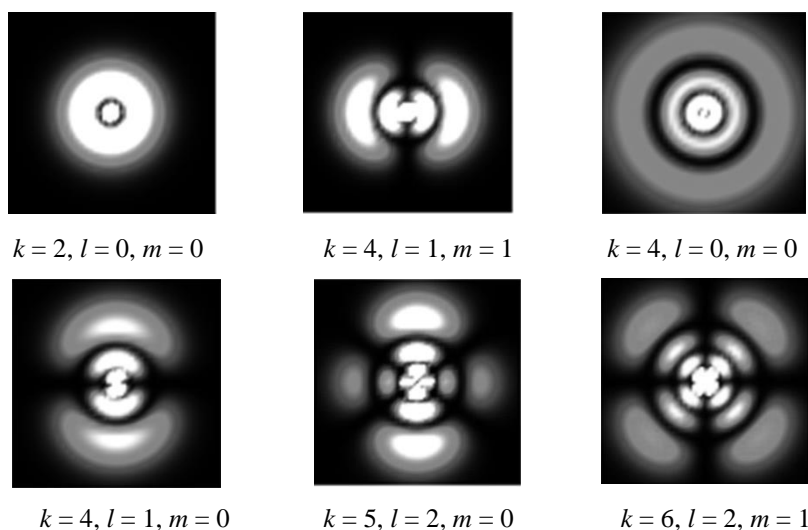


Рис. ПЗ.2. Функции плотности распределения вероятности (ФПРВ) $|\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)|^2$ возможного места нахождения к-ядра при $\varphi = 0$ и различных значениях квантовых чисел k , l и m . Чем светлее пятно, тем больше вероятность появления к-ядра в данной области. Расчеты выполнены с использованием выражения (ПЗ.10) [47] и представлены на веб-странице: [Spherical Harmonic Orbitals.png](#)

Как известно, имеется еще четвертое спиновое квантовое число s , которое в рассматриваемом случае, по своей видимости, связано с одним из двух возможных направлений вращения цитоплазмы внутри биологической клетки. Однако данный процесс в этой статье не рассматривается.

Чтобы экспериментально зафиксировать одну из пространственных конфигураций, показанных на рис. ПЗ.2, необходимо:

- обеспечить отсутствие ощутимого влияния внешних и внутренних силовых факторов на биологическую клетку на весь период наблюдения за к-ядром.

- сделать видеозапись хаотического поведения к-ядра в течение длительного промежутка времени;

- учесть, что клетка в целом может участвовать в сложном тепловом движении; эти движения необходимо устранить физически или исключить программным способом;

- учесть, что к-ядро может менять форму, и его внутреннее содержимое (кариоплазма, хроматин, ядрышко и др.) могут изменяться со временем; это приводит к размыванию границ пространственной конфигурации усреднённого состояния дрожания данной органеллы. Поэтому следует следить не за поведением всего к-ядра, а за хаотическим перемещением только его центра масс. Другими словами необходимо программным способом выявить центр масс к-ядра и следить только за его хаотическими перемещениями.

- оцифрованную, программно-очищенную и математически обработанную видеозапись хаотического поведения центра масс к-ядра воспроизвести с большой скоростью, с отображением данного сильно ускоренного процесса на мониторе компьютера. Скорость воспроизведения движения к-ядра должна быть настолько большой, что данная точка должна «размыться» по всей области наблюдения.

- если все вышеуказанные действия удастся выполнить с достаточно высокой разрешающей способностью видеоаппаратуры, максимально чисто и с исключением различных мешающих факторов и воздействий, то в соответствии с изложенной в данной статье гипотезой, на экране монитора должна выявляться конфигурация темных и светлых пятен (наподобие одной из конфигураций пятен, показанных на рис. ПЗ.3). При этом темное пятно на экране монитора должно означать, что в этом месте к-ядро появлялось чаще, чем в том месте, где образовалось светлое пятно.

Возможно, что конфигурация данных темно-светлых пятен окажется соответствующей одной из собственных волновых функций $\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)$

(точнее ФПРВ $|\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)|^2$) изотропного трехмерного квантового гармонического осциллятора (т.е. негативу конфигураций, показанных на рис. ПЗ.2).

С помощью звуковых колебаний с резонансной частотой (т.е. с частотой близкой к собственной частоте колебаний рассматриваемого изотропного трехмерного квантового гармонического осциллятора)

$$f_{0x} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\pi\tau_{nr}} \quad (\text{ПЗ.12})$$

можно повлиять на к-ядро, тем самым изменить усредненное состояние хаотического дрожания его центра масс (т.е. к-ядра). После этого следует повторить все вышеуказанные действия для выявления другой конфигурации темно-светлых пятен, соответствующих более возбужденному состоянию к-ядра.

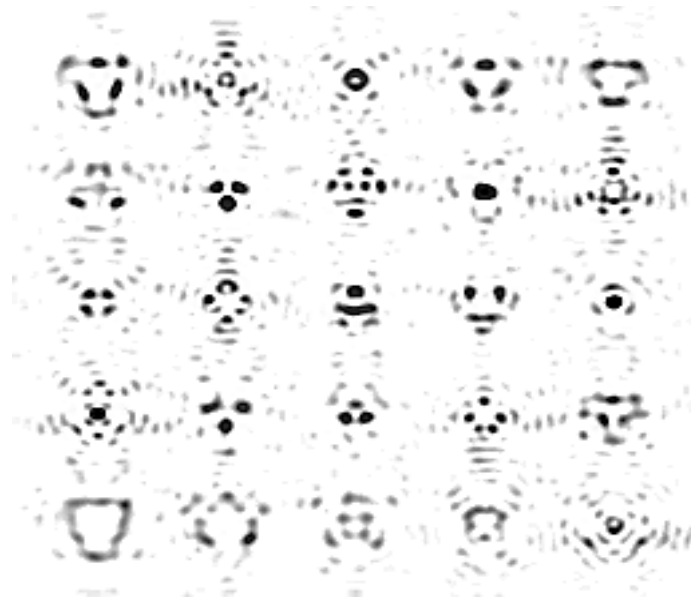


Рис. ПЗ.3. Примеры возможных конфигураций темно-светлых пятен, которые могут быть выявлены в результате усреднения хаотического движения (дрожания) к-ядра внутри биологической клетки. Данные конфигурации пятен могут соответствовать собственным волновым функциям $\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)$ (ПЗ.10) с различными наборами трех квантовых чисел k , l и m

Возможно, что конфигурация данных темно-светлых пятен окажется соответствующей одной из собственных волновых функций $\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)$

(точнее ФПРВ $|\psi_{klm}(r, \theta, \varphi)|^2$) изотропного трехмерного квантового гармонического осциллятора (т.е. негативу конфигураций, показанных на рис. ПЗ.2).

С помощью звуковых колебаний с резонансной частотой (т.е. с частотой близкой к собственной частоте колебаний рассматриваемого изотропного трехмерного квантового гармонического осциллятора)

$$f_{0x} \approx \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2\pi\tau_{nr}} \quad (\text{ПЗ.12})$$

можно повлиять на к-ядро, тем самым изменить усредненное состояние хаотического дрожания его центра масс (т.е. к-ядра). После этого следует повторить все вышеуказанные действия для выявления другой конфигурации темно-светлых пятен, соответствующих более возбужденному состоянию к-ядра.

Не исключено, что данные колебания необходимо возбуждать одновременно с двух противоположных концов каждого из трех взаимно перпендикулярных направлений. Это позволит исключить возможность трансляционного смещения к-ядра (или всей клетки в целом) из-за одностороннего воздействия.

Если изложенные выше основы безмассовой стохастической квантовой механики (БСКМ) оргanelл биологической клетки окажутся верными, то квантовый переход к-ядра из одного усредненного состояния в другое его состояние (т.е. скачкообразное изменение конфигурации темно-светлых пятен на экране монитора), должен происходить при передаче данному к-ядру дополнительной полной механической энергетичности

$$\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{nk} - \varepsilon_{nk+j}, \quad (\text{ПЗ.13})$$

где ε_{nk} – полная механическая энергетичность к-ядра в состоянии k ;

ε_{nk+j} – полная механическая энергетичность к-ядра в состоянии $k+j$

(здесь $j = 1, 2, 3, \dots$).

В этом отношении безмассовая статистическая квантовая биофизика ($\sim 10^{-3}$ см) не должна отличаться от квантовой физики элементарных частиц ($\sim 10^{-13}$ см). Разница заключается только в масштабах рассматриваемых процессов, которые отличаются друг от друга примерно на 10 порядков. Между тем в современном научном сообществе нет сомнений, что квантовая механика применима для описания процессов в промежуточных масштабах, т.е. на молекулярном уровне ($\sim 10^{-8}$ см). Например, квантово-механическими методами описываются осцилляции атомной решетки (фононы), молекулярные вибрации и т.д.

Искусственный перевод органеллы (в частности, к-ядра) биологической клетки в возбужденное состояние, может иметь практическое значение. Например, не исключено, что генетическому материалу (ДНК и/или РНК) вирусов будет сложнее проникать внутрь к-ядра через его ядерные поры, если оно находится в одном из возбужденных состояний (смотрите рис. ПЗ.3). Поэтому возможно, что способ звукового или иного механического воздействия на ядро и/или другие органеллы клетки окажется эффективным способом борьбы с вирусной инфекцией.

6 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. Schrödinger "*Quantisierung als Eigenwertproblem, Vierte Mitteilung*", *Annalen der Physik*, №18 (1926)
- [2] E. Nelson *Derivation of the Schrödinger Equation from Newtonian Mechanics*. *Phys. Rev.* **150** (4): 1079–1085, (1966) [doi:10.1103/physrev.150.1079](https://doi.org/10.1103/physrev.150.1079).
- [3] E. Nelson *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Princeton University Press, Princeton, N.J., (1967) [zbMATH](#) [Google Scholar](#).
- [4] E. Nelson *Quantum fluctuations*. Princeton: Princeton University Press (1985)
- [5] R. Furth "On certain relations between classical Statistics and Quantum Mechanics" *Zeitschrift für Physik* 81, 143 (1933) [arXiv: 2006.03740](https://arxiv.org/abs/2006.03740)

-
- [6] I. Fenyés *Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik*, *Zeitschrift für Physik*, **132**, 81–106 (1952)
- [7] W. Weizel *Ableitung der Quantentheorie aus einem klassischen, kausal determinierten Modell*. (German) *Z. Physik* **134**, 264–285 (1953)
- [8] M. Pavon *Stochastic mechanics and the Feynman integral*. *J. Math. Phys.* **41** (9): 6060–6078 (2000) [arXiv:quant-ph/0007015](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0007015). [doi:10.1063/1.1286880](https://doi.org/10.1063/1.1286880).
- [9] R. Tsekov *"Bohmian Mechanics versus Madelung Quantum Hydrodynamics"*. *Ann. Univ. Sofia, Fac. Phys.* **SE**: 11219 (2012) [arXiv:0904.0723](https://arxiv.org/abs/0904.0723). [doi:10.13140/RG.2.1.3663.8245](https://doi.org/10.13140/RG.2.1.3663.8245).
- [10] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц *Механика*. Наука, Москва (1988) с. 237.
- [11] Л.Э. Эльсгольц *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. Наука, Москва (1969), с. 424.
- [12] А.Н. Матвеев *Атомная физика*. Высшая школа, Москва (1989), с. 439. ISBN 5-06-000056-7.
- [13] N. Rosen *The relation between classical and quantum mechanics*. *Am J Phys* **32**:597–600. (1964) [Google Scholar](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=83333333333333333333&citation_for_view=83333333333333333333:83333333333333333333)
- [14] N. Rosen *Quantum particles and classical particles*. *Found Phys* **16**:687–700. (1986) [Google Scholar](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=83333333333333333333&citation_for_view=83333333333333333333:83333333333333333333)
- [15] R.L.W. Chen *Derivation of the real form of Schrödinger's equation for a nonconservative system and the unique relation between $Re(\psi)$ and $Im(\psi)$* *Journal of Mathematical Physics* **30**, 83 (1989) <https://doi.org/10.1063/1.528593>
- [16] V.J.H. Vleck *The correspondence principle in the statistical interpretation of quantum mechanics*. *Proc Natl Acad Sci USA* **14**(2):178–188. (1994) [Google Scholar](https://scholar.google.com/citations?view_op=view_citation&hl=en&user=83333333333333333333&citation_for_view=83333333333333333333:83333333333333333333)
- [17] Yang & H. Y. Jick *Derivation of the modified Schrödinger equation for a particle with a spatially varying mass through path integrals*. *Phys. Rev. A* **50**, 104. (1994)

-
- [18] F. Ogiba *Phenomenological Derivation of the Schrödinger Equation*, Progress in Physics, 2011, 4, p. 25-28. 4. Piece P., Another Schrodinger Derivation of the Equation, Eur. J. Phys., 17, (1996), p. 116- 117.
 - [19] J. Briggs & J.M. Rost *On the derivation of the time-dependent equation of Schrödinger*, Foundations of Physics, 31 (2001), p. 693-712.
 - [20] J. Briggs, S. Boonchui & S. Khemmani (2007) *The derivation of the time-dependent Schrödinger equation*, J. Phys. A: Math. Theor. 40 1289-1302.
 - [21] M.J.W. Hall & M. Reginatto *Schrodinger Equation from an Exact Uncertainty Principle*, J. Phys. A, **35** (2002), p. 3289-3303.
 - [22] G. Grössing *Derivation of the Schrödinger Equation and the Klein-Gordon Equation from First Principles*, (2002) [v6] [arXiv:quant-ph/0205047](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0205047)
 - [23] S. Inage *One Approach on Derivation of the Schrodinger Equation of Free Particle*, (2006) [arXiv:physics/0610097](https://arxiv.org/abs/physics/0610097)
 - [24] D.W. Ward, S.M. Volkmer (2008) *How to Derive the Schrodinger Equation*. Am.J.Phys./Ward and [v1] [arXiv:physics/0610121](https://arxiv.org/abs/physics/0610121) [physics.hist-ph]
 - [25] C-S. Ricardo *Heuristic Derivation Of The Schrödinger Equation and the Momentum Operator*, (2010) [v2] [arXiv:1004.4935](https://arxiv.org/abs/1004.4935) [math-ph].
 - [26] A. Szepessy *Stochastic and deterministic molecular dynamics derived from the time-independent Schrödinger equation*, (2010) [v5] [arXiv:0812.4338](https://arxiv.org/abs/0812.4338)
 - [27] R.S. Pranab, *Direct Derivation of Schrödinger Equation from Hamilton-Jacobi Equation Using Uncertainty Principle*, Romanian Journal of Physics, 2011, 56(9-10), (2011), p. 1053-1056.
 - [28] J.H. Field *Derivation of the Schrödinger equation from the Hamilton-Jacobi equation in Feynman's path integral formulation of quantum mechanics*. Eur. J. Phys. 32 (2011) 63-87 and [arXiv:1204.0653](https://arxiv.org/abs/1204.0653)
 - [29] P. Chiarelli) *The Schrödinger equation and its generalized analogs derived by the quantum hydrodynamic representation*. (2012 [v7] [arXiv:1210.1138](https://arxiv.org/abs/1210.1138) .
 - [30] W.P. Schleich, D.M. Greenberger, M.O. Scully *Schrödinger equation revisited*. Proceedings of the National Academy of Sciences (2013)
DOI:10.1073/pnas.1302475110 Corpus ID: 26266485

-
- [31] L. Nanni *A New Derivation of the Time-Dependent Schrödinger Equation from Wave and Matrix Mechanics*. Advances in Physics Theories and Applications, Vol. 43 (2015) ISSN 2224-719X (Paper) ISSN 2225-0638 (Online) Vol 43, (2015), [arXiv:1506.03180](https://arxiv.org/abs/1506.03180) [physics.gen-ph] [v1] and <https://iiste.org/Journals/index.php/APTA/article/view/22250>
- [32] N.P. Barde, P.M. Kokne & P. P. Bardapurkar *Deriving time dependent Schrödinger equation from Wave-Mechanics, Schrödinger time independent equation, Classical and Hamilton-Jacobi equations*. Leonardo Electronic Journal of Practices and Technologies ISSN 1583-1078 Issue 26, January-June, (2015), p. 31-4831 http://lejpt.academicdirect.org/A26/031_048.pdf.
- [33] R. Wieser *Derivation of a time dependent Schrödinger equation as quantum mechanical Landau-Lifshitz-Bloch equation*. Eur. Phys. J. B 88, 77 (2015) DOI [10.1088/0953-8984/28/39/396003](https://doi.org/10.1088/0953-8984/28/39/396003) and [arXiv:1607.06184](https://arxiv.org/abs/1607.06184)
- [34] M. Godart *Stochastic Theory of Quantum Mechanics*. (2014) [v2] arXiv: 1206.2917.
- [35] M. Godart *Stochastic theory of quantum mechanics and the Schrödinger equation*. (2016) [v1] [arXiv:1603.08966](https://arxiv.org/abs/1603.08966) [physics.gen-ph].
- [36] L.S.F. Olavo *Quantum Mechanics: Principles, New Perspectives, Extensions and Interpretation (Physics Research and Technology)*. Nova Science Publishers, Incorporated (2016), ISBN: 978-1-63117-450-6
- [37] L.S.F. Olavo *Quantum Mechanics as a Classical Theory XV: Thermodynamical Derivation*. (2019) [v2] <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9703006>.
- [38] J. G. Baixaul *Derivation of the Schrodinger Equation from Classical Physics* International journal of scientific research. (2016) Corpus ID: 124057573
- [39] B.A. Faycal *Space-Time Geodesics and the Derivation of Schrödinger's equation*. (2018) [arXiv:1805.03509](https://arxiv.org/abs/1805.03509)
- [40] P.-H. Chavanis *Derivation of a generalized Schrödinger equation from the theory of scale relativity*. Eur. Phys. J. Plus, 132, 286 (2017) and [arXiv:1612.02323](https://arxiv.org/abs/1612.02323)
- [41] X.-S. Wang *Derivation of the Schrödinger equation based on a fluidic continuum model of vacuum and a sink model of particles*. (2018) [arXiv:physics/0610224](https://arxiv.org/abs/physics/0610224)

-
- [42] С.М. Рытов (1976) Введение в статистическую радиофизику Ч.1. – М.: Наука, С. 494.
- [43] В.И. Тиханов (1982) Статистическая радиофизика. – М.: Радио и связь, С. 622.
- [44] M. Batanov-Gaukhman (2020) *The Diffraction of Microparticles on Single-layer and Multi-layer Statistically Uneven Surfaces* [v1] [arXiv:2007.13527](https://arxiv.org/abs/2007.13527)
- [45] Д.И. Блохинцев (1963) Основы квантовой механики. – М.: Высшая школа, С. 620.
- [46] R.P. Feynman & A.R. Hibbs (1965) *Quantum Mechanics and Path Integrals*. DOI:[10.1063/1.3048320](https://doi.org/10.1063/1.3048320) Corpus ID: 117361245
- [47] Fradkin, D. M. (1965) *Three-dimensional isotropic harmonic oscillator and SU3*. American Journal of Physics **33** (3) 207–211.
https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_harmonic_oscillator
- [48] L. Arnold (1974) *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. John Wiley & Sons, New York.