АНАЛОГ КОМПАКТНОГО МНОГООБРАЗИЯ КАЛАБИ-ЯУ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРЫ СИГНАТУР

Михаил Батанов-Гаухман[1]

(1) Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
Институт № 2 “Авиационные и ракетные двигатели и энергетические установки”,
ул. Волоколамское шоссе 4, Москва – Россия, 125993
(e-mail: alsignat@yandex.ru)

АННОТАЦИЯ

Предложено многомерное Риччи-плоское пространство, в котором дополнительные измерения гармонично компенсируют проявления друг друга в соответствии с внутренней топологической структурой данного многообразия, то есть без дополнительных условий. Вместе с тем, геометрических и топологических параметров такого пространства, выработанных в рамках Алгебры сигнатур [1,2,3,4], оказалось достаточно для создания метрико-динамических моделей всех элементарных частиц, входящих в состав Стандартной Модели [5,6,7,8]. В том числе удается геометризировать такие понятия как: заряд, спин, инертная масса, цвета и конфайнмент кварков, а также предлагаются пути метрико-динамического обоснования природы гравитации, темной материи и энергии и т.д. В связи с этими возможностями многомерной геометрии, основанной на Алгебре сигнатур, генерируемое ею многомерное Риччи-плоское пространство может быть предложено как альтернатива многообразию Калаби-Яу, используемому в теории суперструн.

ABSTRACT

A multidimensional Ricci-flat space is proposed, in which additional dimensions harmoniously compensate each other's manifestations in accordance with the internal topological structure of a given manifold, i.e., without additional conditions. At the same time, the geometric and topological parameters of such a space, developed within the framework of Algebra the Signature [1,2,3,4], turned out to be sufficient for the creation of metric-dynamic models of all elementary particles included in the Standard Model [5,6,7,8]. In particular, it is possible to geometrize such concepts as charge, spin, inertial mass, colors and confinement of the quarks, and also propose ways of metric-dynamically substantiating the nature of gravity, dark matter and energy, etc. In connection with these possibilities of the multidimensional geometry based on the Algebra Signature, the multidimensional Ricci-flat space generated by it can be proposed as an alternative to the Calabi-Yau manifold used in superstring theory.

Ключевые слова: многомерная теория, многомерное Риччи-плоское пространство, многообразие Калаби-Яу, пространственная ткань.

Keywords: multidimensional theory, multidimensional Ricci-flat space, Calabi-Yau manifold, spatial web.

ВВЕДЕНИЕ

Для геометрического и топологического описания свойств многих элементарных частиц, входящих в состав Стандартной Модели, свойств 4-мерного пространственно-временного континуума Минковского оказалось недостаточно. Одно из направлений ведения дополнительных параметров пространства связано с увеличением количества измерений.

В частности, в рамках теории суперструн с каждой точкой 3-мерного пространства связано компактное риччи-плоское многообразие Калаби-Яу, с тремя комплексными (или с шестью пространственными) дополнительными измерениями, которые свернуты в очень малых масштабах (~ планковской длины). В М-теории аналогично добавлены семь пространственных координат.

В результате свойства элементарных частиц Стандартной Модели (их типы, массы, взаимодействия) оказались "закодированными" в геометрической и топологической структуре многообразия Калаби-Яу со специальной голономией SU(n). Тензор Риччи многообразия Калаби-Яу равен нулю ($R_{ij} = 0$) – это условие нулевого энергии-импульса фоновой геометрии.

В рамках теории суперструн частицы-переносчики взаимодействий (фотоны, глюоны, W/Z-бозоны) "живут" на т.н. расслоениях над многообразием Калаби-Яу. Кварки и лептоны соответствуют нулевым модам оператора Дирака на Калаби-Яу. Их количество (число поколений частиц) определяется разностью чисел Эйлера его двух естественных подмногообразий. Значения юкавских связей (определяющих массы фермионов) и констант калибровочных взаимодействий вычисляются через интегралы от дифференциальных форм по циклам в Калаби-Яу.

Несмотря на то, что теория суперструн значительно приблизила нас к пониманию структурной организации микромира и привела к большим прорывам в развитии математики, она имеет существенные недостатки:
- отсутствие возможности прямой экспериментальной проверки предсказанных ею явлений. Причина заключается в чрезвычайно высоких энергиях, необходимых для наблюдения поведения струн, в миллиард миллиардов раз больше доступной энергии современных экспериментов;
- сложность абстрактной математики, при этом некоторые ключевые элементы теорий струн и суперструн пока не имеют строгого математического обоснования. Например, чтобы "зафиксировать" форму (размеры "дыр") многообразий Калаби-Яу нужны дополнительные механизмы (флюкс-компактификации, инстантонные поправки) и т.п.;
- известны порядка 10^{500} различных многообразий Калаби-Яу (landscape problem). Каждое многообразие Калаби-Яу порождает свою низкоэнергетическую физику. Это чрезвычайно затрудняет выбор единственного решения, которое соответствовало бы нашим наблюдениям и вызывает сомнения в способности этой теории однозначно описать реальный мир и т.д.

В этой статье рассматривается альтернативный способ добавления дополнительных измерений при соблюдении условия $R_{ij} = 0$, который был предложен в Алгебре сигнатур [1,2,3,4]. Такое гармоничное наращивание возможностей геометрии и топологии позволяет сконструировать метрико-динамические модели всех элементарных частиц, входящих в состав Стандартной Модели [5,6,7,8,9], и развить иерархическую космологическую модель, т.е. сформировать модельные представления о всей Вселенной в целом [5,6,7,8,9,10,11,12,13].

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОД

1 Суперпозиция метрических пространств с различными сигнатурами (т.е. топологиями)

Алгебра сигнатур, развитая в статьях [1,3,4], предлагает рассматривать каждую точку пространства, например точку O, как место пресечения 16-ти метрических пространств

$$
\begin{array}{ll}
ds^{(++++)2} = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(----)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \\
ds^{(---+)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(+++-)2} = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
ds^{(+--+)2} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(-++-)2} = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
ds^{(+---)2} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(-+++)2} = -dx_0^2 + d\,x_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(--+-)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(++-+)2} = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(-+--)2} = -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(+-++)2} = dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(+-+-)2} = dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(-+-+)2} = -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(++--)2} = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(--++)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2
\end{array}
\qquad (1)
$$

с соответствующими 16-ю всевозможными сигнатурами, образующими антисимметричную матрицу

$$
sign\left(ds^{(a,b)2}\right) = \begin{pmatrix} (+++\,+) & (+++\,-) & (-++\,-) & (+\,+-+) \\ (---\,+) & (-++\,+) & (--+\,+) & (-+-\,+) \\ (+--\,+) & (++-\,-) & (+--\,-) & (+-+\,+) \\ (--+\,-) & (+-+\,-) & (-+-\,-) & (----) \end{pmatrix}. \qquad (2)
$$

По классификации Феликса Клейна [14] метрические пространства с метриками (1) могут быть разделены на три топологических типа:

1-й тип: Метрические 4-пространства, сигнатуры которых состоят из четырех одинаковых знаков [14]:

$$
\begin{array}{ll}
x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 & (++++) \\
-x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 & (----)
\end{array}
\qquad (3)
$$

– это так называемые нулевые метрические 4-пространства. У этих «пространств» имеется только одна действительная точка, находящаяся в начале светового конуса. Все остальные точки этих протяженностей являются мнимыми. По сути, первое из выражений (3) описывает не «протяженность», а единственную точку (или «белую» точку), а второе – единственную антиточку (или «черную» точку).

2-й тип: Метрические 4-пространства, сигнатуры которых состоят из двух положительных и двух отрицательных знаков [14]:

$$
\begin{aligned}
x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 \qquad (+\,-\,-\,+)\\
x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 \qquad (+\,+\,-\,-)\\
x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 \qquad (+\,-\,+\,-)\\
-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 \qquad (-\,+\,+\,-)\\
-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \qquad (-\,-\,+\,+)\\
-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 \qquad (-\,+\,-\,+)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

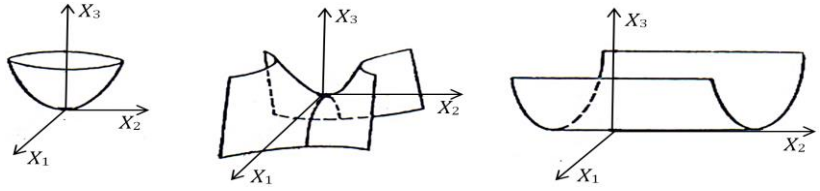
– это различные варианты 4-мерных торов.

3-й тип: Метрические 4-пространства, сигнатуры которых состоят из трех одинаковых знаков и одного противоположного [14]:

$$
\begin{aligned}
-x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 \qquad (-\,-\,-\,+)\\
-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 \qquad (-\,-\,+\,-)\\
-x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 \qquad (-\,+\,-\,-)\\
x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 &= 0 \qquad (+\,-\,-\,-)\\
x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 &= 0 \qquad (+\,+\,+\,-)\\
x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 &= 0 \qquad (+\,+\,-\,+)\\
x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \qquad (+\,-\,+\,+)\\
-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 0 \qquad (-\,+\,+\,+)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

– это овальные 4-поверхности: эллипсоиды, эллиптические параболоиды, двуполостные гиперболоиды.

Упрощенная иллюстрация связи сигнатуры 2-мерного пространства с его топологией показана на рис. 1. Из этого рисунка видно, что сигнатура квадратичной формы однозначно связана с топологией 2-мерной протяженности, но не наоборот. Топология протяженности значительно более емкое понятие, чем сигнатура ее метрики.



а) сигнатура (+ +) $x_3 = x_1^2 + x_2^2$ параболическая поверхность;
б) сигнатура (– +) $x_3 = x_2^2 - x_1^2$ седловидная поверхность;
в) сигнатура (+ 0) $x_3 = x_1^2$ U-образная поверхность

Рис. 1: Иллюстрация связи сигнатуры 2-мерного пространства с его топологией [14]

2 Расщепление нуля

Сумма всех 16 метрик (1) равна нулю:

$$
\begin{aligned}
ds_\Sigma{}^2 = {} & ds^{(+---)2} + ds^{(++++)2} + ds^{(---+)2} + ds^{(+--+)2} +\\
& + ds^{(--+-)2} + ds^{(++--)2} + ds^{(-+--)2} + ds^{(+-+-)2} +\\
& + ds^{(-+++)2} + ds^{(----)2} + ds^{(+++-)2} + ds^{(-++-)2} +\\
& + ds^{(++-+)2} + ds^{(--++)2} + ds^{(+-++)2} + ds^{(-+-+)2} = 0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Действительно, складывая метрики (1), получим

$$
\begin{aligned}
ds_\Sigma{}^2 = {} & (dx_0dx_0 - dx_1dx_1 - dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + dx_3dx_3) +\\
& + (-dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (dx_0dx_0 - dx_1dx_1 - dx_2dx_2 + dx_3dx_3) +\\
& + (-dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (dx_0dx_0 + dx_1dx_1 - dx_2dx_2 - dx_3dx_3) +\\
& + (-dx_0dx_0 + dx_1dx_1 - dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) +\\
& + (-dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + dx_3dx_3) + (-dx_0dx_0 - dx_1dx_1 - dx_2dx_2 - dx_3dx_3) +\\
& + (dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) + (-dx_0dx_0 + dx_1dx_1 + dx_2dx_2 - dx_3dx_3) +\\
& + (dx_0dx_0 + dx_1dx_1 - dx_2dx_2 + dx_3dx_3) + (-dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + dx_3dx_3) +\\
& + (dx_0dx_0 - dx_1dx_1 + dx_2dx_2 + dx_3dx_3) + (-dx_0dx_0 + dx_1dx_1 - dx_2dx_2 + dx_3dx_3) = 0.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Вместо суммирования однородных слагаемых в выражении (7) можно суммировать только знаки, стоящие перед этими слагаемыми:

(8)

$$
\begin{array}{llll}
0 = & \underline{(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)} & + & \underline{(0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)} \quad = 0 \\
0 = & (+\ +\ +\ +) & + & (-\ -\ -\ -) \quad = 0 \\
0 = & (-\ -\ -\ +) & + & (+\ +\ +\ -) \quad = 0 \\
0 = & (+\ -\ -\ +) & + & (-\ +\ +\ -) \quad = 0 \\
0 = & (-\ -\ +\ -) & + & (+\ +\ -\ +) \quad = 0 \\
0 = & (+\ +\ -\ -) & + & (-\ -\ +\ +) \quad = 0 \\
0 = & (-\ +\ -\ -) & + & (+\ -\ +\ +) \quad = 0 \\
0 = & (+\ -\ +\ -) & + & (-\ +\ -\ +) \quad = 0 \\
0 = & \underline{(-\ +\ +\ +)} & + & \underline{(+\ -\ -\ -)} \quad = 0 \\
0 = & (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)_{+} & + & (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)_{+} \quad = 0.
\end{array}
$$

Операции над сигнатурами типа (8) будем называть топологическими ранжирами, где суммирование (или вычитание) знаков (+) и (–) производятся как по столбцам, так и строкам по правилам арифметики:

$$(+) + (+) = 2(+), \quad (-) + (+) = (0), \qquad (+) - (+) = (0), \quad (-) - (+) = 2(-), \tag{9}$$

$$(+) + (-) = (0), \quad (-) + (-) = 2(-), \qquad (+) - (-) = 2(+), \quad (-) - (-) = (0). \tag{10}$$

Сумма знаков в топологических ранжирах (8), как по столбцам, так и по строкам между ранжирами, равна нулю. Поэтому данное ранжирное тождество будем называть «расщеплением нуля». Вместе с тем, топологическое выражение (8) является математическим выражением «нулевого вакуумного баланса».

Возможен перенос любой строки из числителей ранжиров (8) в их знаменатели, с инвертированием знаков и соблюдением построчного нулевого вакуумного баланса. Например, перенесем четвертую строчку сверху из числителя ранжиров (8) в их знаменатель:

(11)

$$
\begin{array}{llll}
0 = & (+\ +\ +\ +) & + & (-\ -\ -\ -) \quad = 0 \\
0 = & (-\ -\ -\ +) & + & (+\ +\ +\ -) \quad = 0 \\
0 = & (+\ -\ -\ +) & + & (-\ +\ +\ -) \quad = 0 \\
0 = & (+\ +\ -\ -) & + & (-\ -\ +\ +) \quad = 0 \\
0 = & (-\ +\ -\ -) & + & (+\ -\ +\ +) \quad = 0 \\
0 = & (+\ -\ +\ -) & + & (-\ +\ -\ +) \quad = 0 \\
0 = & \underline{(-\ +\ +\ +)} & + & \underline{(+\ -\ -\ -)} \quad = 0 \\
0 = & (+\ +\ -\ +)_{+} & + & (-\ -\ +\ -)_{+} \quad = 0.
\end{array}
$$

Топологическое ранжирное выражение (11) показывает, что каждая пара взаимно противоположных 4-метрик (т.е. квадратичных форм), например, $ds^{(+\,+\,-\,+)2} = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2$ и $ds^{(-\,-\,+\,-)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2$, может быть выражена аддитивным наложением (т.е. сложением) 7 + 7 = 14-ти 4-под-метрик с сигнатурами из числителей топологических ранжиров вида (11). Все остальные взаимно противоположные пары 4-метрик в ранжирах (8), также могут быть выражены через суммы 7 + 7 = 14-ти 4-под-метрик с соответствующими сигнатурами.

В свою очередь, любые взаимно противоположные пары 4-под-метрик с сигнатурами (8), также могут быть выражены через суммы 7 + 7 = 14-ти 4-под-под-метрик с соответствующими сигнатурами. Такое «углубление» может продолжаться до бесконечности.

Таким образом в каждой точке пустоты (в том числе и в исследуемой точке *O*) происходит аддитивное наложение бесконечного количества метрических 4-пространств с 16-ю типами сигнатур (т.е. топологий), среди которых два типа точек (3), 6 типов торов (4) и 8 типов овальных поверхностей (5), которые в среднем компенсируют проявления друг друга (т.е. соблюдается условие «нулевого вакуумного баланса»).

Совокупность всех подобных точек приводит к формированию 3-мерного нулевого Риччи-плоского пространства (многообразия), так как нулевой топологический узел (8) в каждой точке такого пространства приводит к суммарной метрике (6) $ds_\Sigma^2 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$, которая является тривиальным решением вакуумного уравнения Эйнштейна $R_{ij} = 0$.

3 Другие возможные операции с топологическими ранжирами

Топологическое «расщепление нуля» (т.е. ранжирное выражение) (8) позволяет проделывать в окрестности каждой исследуемой точки *O* некоторые операции без нарушения «нулевого вакуумного баланса».

К таким операциям относится, например, симметричный перенос первого и пятого столбцов в выражении (8) на другую сторону равенства с инвертированием знаков, при соблюдении построчного и порядного равенства нулю:

(12)

$$
\begin{array}{llllll}
0 = & \underline{(0 & 0 & 0)} & + & \underline{(0\ 0\ 0)} \quad = 0 \\
- = & (+ & + & +) & + & (- \ - \ -) \quad = + \ \rightarrow 0 \\
+ = & (- & - & +) & + & (+ \ + \ -) \quad = - \ \rightarrow 0 \\
- = & (- & - & +) & + & (+ \ + \ -) \quad = + \ \rightarrow 0 \\
+ = & (- & + & -) & + & (+ \ - \ +) \quad = - \ \rightarrow 0 \\
- = & (+ & - & -) & + & (- \ + \ +) \quad = + \ \rightarrow 0 \\
+ = & (+ & - & -) & + & (- \ + \ +) \quad = - \ \rightarrow 0 \\
- = & (- & + & -) & + & (+ \ - \ +) \quad = + \ \rightarrow 0 \\
+ = & \underline{(+ & + & +)} & + & \underline{(- \ - \ -)} \quad = - \ \rightarrow 0 \\
0 = & (0 & 0 & 0)_{+} & + & (0\ 0\ 0)_{+} \quad = 0.
\end{array}
$$

Аналогично могут быть симметрично перенесены на другую сторону равенства любые соответствующие (т.е. взаимно противоположные) друг другу столбцы ранжирного выражения (8).

Также возможны смешанные операции переноса строк и столбцов в топологических ранжирах (8), которые не нарушают построчного равенств нулю, например:

(13)

$$
\begin{array}{llllll}
- = & (+ & + & +) & + & (- \ - \ -) \quad = + \ \rightarrow 0 \\
- = & (- & - & -) & + & (+ \ + \ +) \quad = + \ \rightarrow 0 \\
- = & (+ & - & -) & + & (- \ + \ +) \quad = + \ \rightarrow 0 \\
+ = & (+ & + & -) & + & (- \ - \ +) \quad = - \ \rightarrow 0 \\
+ = & (- & + & -) & + & (+ \ - \ +) \quad = - \ \rightarrow 0 \\
+ = & (+ & - & +) & + & (- \ + \ -) \quad = - \ \rightarrow 0 \\
\underline{- =} & \underline{(- & + & +)} & + & \underline{(+ \ - \ -)} \quad \underline{= + \ \rightarrow 0} \\
- = & (+ & + & -)_{+} & + & (- \ - \ +)_{+} \quad = + \ \rightarrow 0.
\end{array}
$$

Подобные операции соответствуют различным вакуумным симметриям.

4 Четырех-нитевая пространственная ткань

Перенесем сигнатуры (– + + +) и (+ – – –) из числителей топологических ранжиров (8) в их знаменатели

(14)

$$
\begin{array}{llll}
(+ & + & + & +) \quad + \quad (- \ - \ - \ -) \quad = 0 \\
(- & - & - & +) \quad + \quad (+ \ + \ + \ -) \quad = 0 \\
(+ & - & - & +) \quad + \quad (- \ + \ + \ -) \quad = 0 \\
(- & - & + & -) \quad + \quad (+ \ + \ - \ +) \quad = 0 \\
(+ & + & - & -) \quad + \quad (- \ - \ + \ +) \quad = 0 \\
(- & + & - & -) \quad + \quad (+ \ - \ + \ +) \quad = 0 \\
\underline{(+} & \underline{-} & \underline{+} & \underline{-)} \quad + \quad \underline{(- \ + \ - \ +)} \quad = 0 \\
(+ & - & - & -)_{+} \quad + \quad (- \ + \ + \ +)_{+} \quad = 0.
\end{array}
$$

В развернутой форме ранжиры (14) имеют следующий вид

(15)

$$
\begin{array}{ll}
ds^{(++++)2} = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(----)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \\
ds^{(---+)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(+++-)2} = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
ds^{(+--+)2} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(-++-)2} = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
ds^{(--+-)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(++-+)2} = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(-+--)2} = -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(+-++)2} = dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(+-+-)2} = dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(-+-+)2} = -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
\underline{ds^{(++--)2} = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2} & \underline{ds^{(--++)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \\
ds^{(+---)2} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(-+++)2} = -dx_0^2 + d x_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2
\end{array}
$$

Ранжирное выражение (14) эквивалентно тому, что сложение (т.е. аддитивное наложение) 7-ми метрических пространств с сигнатурами (топологиями), указанными в числителе левого ранжира (14) (или (15)), образуют метрическое 4-пространство Минковского с метрикой

$$ds^{(+---)2} = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \quad \text{с сигнатурой } (+---), \tag{16}$$

где $ds^{(+---)2} = ds^{(++++)2} + ds^{(---+)2} + ds^{(+--+)2} + ds^{(--+-)2} + ds^{(++--)2} + ds^{(-+--)2} + ds^{(+-+-)2}$.

Аналогично аддитивное наложение 7-ми метрических пространств с сигнатурами, указанными в числителе правого ранжира (14) (или (15)), образуют метрическое 4-антипространство Минковского с метрикой

$$ds^{(-+++)2} = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \quad \text{с сигнатурой } (-+++), \tag{17}$$

где $ds^{(-+++)2} = ds^{(----)2} + ds^{(+++-)2} + ds^{(-++-)2} + ds^{(++-+)2} + ds^{(--++)2} + ds^{(+-++)2} + ds^{(-+-+)2}$.

При этом топологический нулевой вакуумный баланс не нарушается: $(+---) + (-+++) = (0\ 0\ 0\ 0)$, или в транспонированном виде

$$\begin{array}{l}(+---)\\ \underline{(-+++)}\\ (0\ 0\ 0\ 0)_+\end{array} \tag{18}$$

Напомним, что в общей теории относительности (ОТО) А. Эйнштейна имеет место только одно метрическое 4-пространство с сигнатурой, например, $(+---)$. Тогда как в развиваемой здесь теории физического пространства является пересечением (т.е. переплетением) как минимум двух 4-мерных многообразий с взаимно противоположными сигнатурами $(+---)$ и $(-+++)$. При этом на следующем (втором) уровне рассеяния необходимо учитывать пересечение (т.е. переплетение) 16-ти метрических пространств (1) с сигнатурами (топологиями) (2).

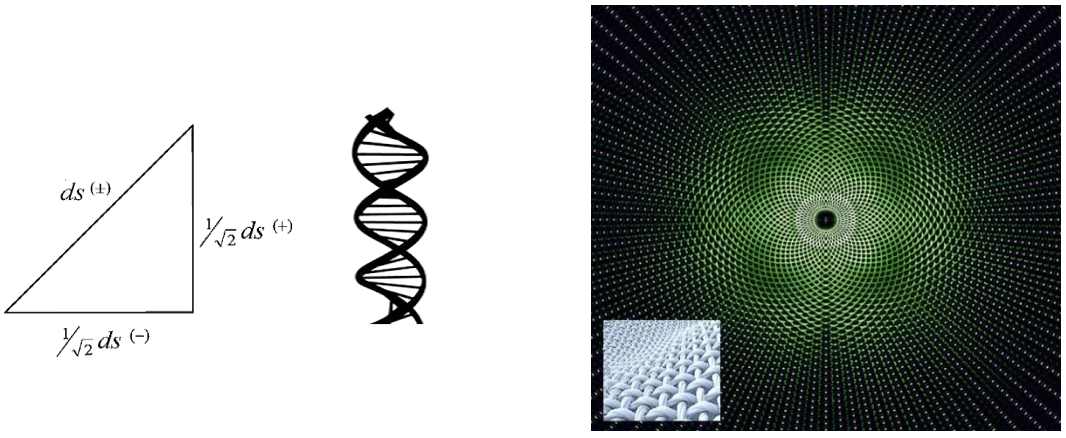
Переплетение данных двух взаимно-противоположных пространств обусловлен тем, что результат усреднения метрик (16) и (17)

$$ds^{(\pm)2} = \tfrac{1}{2}\,(ds^{(+---)2} + ds^{(-+++)2}) = \tfrac{1}{2}\,(ds^{(+)2} + ds^{(-)2}), \tag{19}$$

напоминает теорему Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Это означает, что отрезки линий $(\tfrac{1}{2})^{1/2}ds^{(+)}$ и $(\tfrac{1}{2})^{1/2}ds^{(-)}$ всегда взаимно перпендикулярны по отношению друг к другу $ds^{(+)} \perp ds^{(-)}$ (рис. 2*а*), т.е. образуют двойную спираль (рис. 2*б*)

$$ds^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(ds^{(+)} + i ds^{(-)}), \tag{20}$$

квадрат модуля которой равен выражению (19).



а) *б*) *в*)

Рис. 2: а) Взаимно перпендикулярные отрезки $(\tfrac{1}{2})^{1/2}ds^{(+)}$ и $(\tfrac{1}{2})^{1/2}ds^{(-)}$ – стороны прямоугольного треугольника; б) Линии правильной двойной спирали взаимно перпендикулярны $ds^{(+)} \perp ds^{(-)}$; *в*) Иллюстрация пространственной ткани

Представим метрики (16) и (17) в следующем виде

$$\begin{cases} ds_0^{(+)2} = \ c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = ds^{(+)\prime}ds^{(+)\prime\prime} = \ cdt'cdt'' - dx'dx'' - dy'dy'' - dz'dz''; \\ ds_0^{(-)2} = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^{(-)\prime}ds^{(-)\prime\prime} = -cdt'cdt'' + dx'dx'' + dy'dy'' + dz'dz''. \end{cases} \quad (21)$$

где отрезки четырех линий (т.е. «нитей») $ds^{(+)\prime}, ds^{(+)\prime\prime}, ds^{(-)\prime}, ds^{(-)\prime\prime}$ взаимно перпендикулярны

$$ds^{(+)\prime} \perp ds^{(+)\prime\prime} \perp ds^{(-)\prime} \perp ds^{(-)\prime\prime} \quad (22)$$

и образуют спирали, описываемые комплексными числами

$$\begin{aligned} ds^{(+,+)} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(ds^{(+)\prime} + ids^{(+)\prime\prime}), \\ ds^{(-,-)} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(ds^{(-)\prime} + jds^{(-)\prime\prime}), \\ ds^{(+,-)} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(ds^{(+)\prime} + kds^{(-)\prime}), \\ ds^{(-,+)} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(ds^{(+)\prime\prime} + lds^{(-)\prime\prime}), \end{aligned} \quad (23)$$

где *i,j,k,l* – мнимые единицы.

Переплетение этих спиралей образует 4-нитевую пространственную ткань (рис. 2*в*).

Такая 4-нитевая пространственная ткань с одной стороны, как бы отсутствует, т.к. метрические пространства с метриками (16) и (17) полностью компенсируют проявления друг друга

$$ds^{(+---)2} + ds^{(-+++)2} = (c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2) + (-c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) = 0c^2dt^2 + 0dx^2 + 0dy^2 + 0dz^2 = 0, \quad (23)$$

с другой стороны отрезки их геодезических линий $ds^{(+)\prime}, ds^{(+)\prime\prime}, ds^{(-)\prime}, ds^{(-)\prime\prime}$ взаимно перпендикулярны, что порождает устойчивую иллюзию их постоянного сосуществования в виде 3-метной сетки (рис. 2*в*), каждая ячейка которой причудливо изменяется (вращается) с частотой $f = 1/dt$.

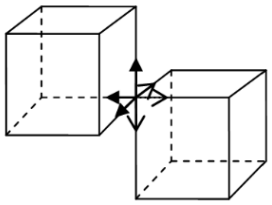


Рис. 3: Трехгранные углы смежных кубических ячеек вращаются во взаимно-противоположные стороны (т.е., по часовой стрелке и против часовой стрелки)

То есть, рассматриваемая 4-нитевая пространственная ткань – это не статичная 3-мерная сеть, а повсеместно постоянно бурлящая протяженность, каждая локальная кубическая ячейка которой постоянно причудливо вращается с частотой, определяющей единицу ее характерного времени $dt = 1/f$. При этом ритмичные флуктуации всех кубических ячеек бурлящей пространственной ткани столь причудливы, что все 8 их тройных углов вращаются во взаимно противоположных направлениях по отношению к смежным тройным углам соседних кубических ячеек (рис. 3) (смотрите §3 в [1]), чтобы не нарушался полный «вакуумный баланс».

5 Шестнадцати-нитевая пространственная ткань

На следующем более глубинном уровне рассмотрения количество измерений получается $16 \times 4 = 64 = 2^6$. При этом метрико-динамические свойства локального участка вакуума характеризуются суперпозицией (т.е., аддитивным наложением или усреднением) шестнадцати метрик (1) со всеми 16-ю возможными сигнатурами (2)

$$\begin{aligned} ds_\Sigma^2 = 1/16\ (&ds^{(+---)2} + ds^{(++++)2} + ds^{(---+)2} + ds^{(+--+)2} + \\ &+ ds^{(--+-)2} + ds^{(++--)2} + ds^{(-+--)2} + ds^{(+-+-)2} + \\ &+ ds^{(-+++)2} + ds^{(----)2} + ds^{(+++-)2} + ds^{(-++-)2} + \\ &+ ds^{(++-+)2} + ds^{(--++)2} + ds^{(+-++)2} + ds^{(-+-+)2}). \end{aligned} \quad (24)$$

В этом случае ткань пространства сплетается из 16-ти нитей

$$\begin{aligned} ds'_{(16)} = 1/\sqrt{16}\ (&\eta_1 ds^{(+---)\prime} + \eta_2 ds^{(++++)\prime} + \eta_3 ds^{(---+)\prime} + \eta_4 ds^{(+--+)\prime} + \\ &+ \eta_5 ds^{(--+-)\prime} + \eta_6 ds^{(++--)\prime} + \eta_7 ds^{(-+--)\prime} + \eta_8 ds^{(+-+-)\prime} + \\ &+ \eta_9 ds^{(-+++)\prime} + \eta_{10} ds^{(----)\prime} + \eta_{11} ds^{(+++-)\prime} + \eta_{12} ds^{(-++-)\prime} + \\ &+ \eta_{13} ds^{(++-+)\prime} + \eta_{14} ds^{(--++)\prime} + \eta_{15} ds^{(+-++)\prime} + \eta_{16} ds^{(-+-+)\prime}), \end{aligned} \quad (25)$$

и 16-ти антинитей

$$ds''_{(16)} = 1/\sqrt{16}\,(\eta_1\, ds^{(+---)''} + \eta_2\, ds^{(++++)''} + \eta_3\, ds^{(---+)''} + \eta_4\, ds^{(+--+)''} + \\ + \eta_5\, ds^{(--+-)''} + \eta_6\, ds^{(++--)''} + \eta_7\, ds^{(-+--)''} + \eta_8\, ds^{(+--+)''} + \\ + \eta_9\, ds^{(-+++)''} + \eta_{10}\, ds^{(----)''} + \eta_{11}\, ds^{(+++-)''} + \eta_{12}\, ds^{(-++-)''} + \\ + \eta_{13}\, ds^{(++-+)''} + \eta_{14}\, ds^{(--++)''} + \eta_{15}\, ds^{(+-++)''} + \eta_{16}\, ds^{(-+-+)''}), \tag{26}$$

где η_m – ортонормированный базис из 16-ти единичных объектов (m = 1,2,3,…,16) типа мнимых единиц, удовлетворяющих антикоммутационному соотношению алгебры Клиффорда

$$\eta_m\eta_n + \eta_n\eta_m = 2\delta_{mn}\,, \tag{27}$$

где δ_{nm} – единичная 16×16-матрица.

Таким образом на данном уровне рассмотрения узлы и жгуты пространственной ткани состоят из 16 × 2 = 32-х переплетенных линий (нитей) (25) и антилиний (т.е. антинитей) (26), которым условно присваиваются «цвета» в соответствии с их сигнатурами:

(28)

Красный	(+ + + +)	+ (– – – –)	Анти-красный
Желтый	(– – – +)	+ (+ + + –)	Анти-желтый
Оранжевый	(+ – – +)	+ (– + + –)	Анти-оранжевый
Зеленый	(– – + –)	+ (+ + – +)	Анти-зеленый
Голубой	(+ + – –)	+ (– – + +)	Анти-голубой
Синий	(– + – –)	+ (+ – + +)	Анти-синий
Фиолетовый	(+ – + –)	+ (– + – +)	Анти-фиолетовый
Белый	$(+ - - -)_+$	+ $(- + + +)_+$	Черный

Формальная раскраска 32-х нитей и антинитей $ds^{(+---)}$, $ds^{(-+++)}$, $ds^{(++++)}$, $ds^{(++-+)}$, … , $ds^{(-+-+)}$ позволяет представить сплетенную из них пространственную «ткань» в цветном виде (рис. 4).

В плоском многомерном пространстве (в том числе при $R_{ij} = 0$) такую «цветную» ткань, с одной стороны, можно считать присутствующей, а, с другой стороны, она отсутствует так как сумма всех 16-ти «цветных» осевых линяний (нитей) рана нулю

$$ds_\Sigma = (-dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3) + (dx_0 + dx_1 + dx_2 + dx_3) + \\ + (dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3) + (-dx_0 - dx_1 - dx_2 + dx_3) + \\ + (-dx_0 + dx_1 + dx_2 - dx_3) + (dx_0 - dx_1 - dx_2 + dx_3) + \\ + (dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3) + (-dx_0 - dx_1 + dx_2 - dx_3) + \\ + (-dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) + (dx_0 + dx_1 - dx_2 - dx_3) + \\ + (dx_0 - dx_1 + dx_2 + dx_3) + (-dx_0 + dx_1 - dx_2 - dx_3) + \\ + (-dx_0 + dx_1 - dx_2 + dx_3) + (dx_0 - dx_1 + dx_2 - dx_3) + \\ + (dx_0 - dx_1 - dx_2 - dx_3) + (-dx_0 + dx_1 + dx_2 + dx_3) = 0. \tag{29}$$

Другими словами, в этом случае не требуется накладывать никаких дополнительных условий на свертывание дополнительных измерений, так как они свертываются естественным образом за счет из совместной взаимной компенсации.

6 «Цветные» аффиноры

Ортонормированный базис из 16-ти единичных объектов η_m, отвечающих требованиям алгебры Клиффорда (27) может быть получен следующим образом.

Рассмотрим метрику с сигнатурой (+ – – –)

$$ds^{(+---)2} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2.$$

Для краткости опустим в этой метрике знаки дифференциалов

$$s^{(+---)2} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \tag{30}$$

Квадратичная форма (30), как известно, является детерминантом эрмитовой 2×2-матрицы

$$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}_{det} = \begin{vmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{vmatrix} = x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2 = s^{(+---)2} \quad \text{с сигнатурой } (+---). \tag{31}$$

В том, что данная матрица является эрмитовой, легко убедиться прямым вычислением

$$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}^{+} = \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

В теории спиноров матрицы вида (26) называют смешанными эрмитовыми спинтензорами второго ранга [6]. Представим 2×2-матрицу (26) в развернутом виде

$$A_4 = \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} = x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где $\sigma_0^{(+---)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\sigma_1^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_2^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$; $\sigma_3^{(+---)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

– набор матриц Паули - Кэли.

В теории спиноров A_4-матрицам (т.е., аффинорам) вида (27) ставятся в однозначное соответствие кватернионы типа

$$q = x_0 + \vec{e}_1x_1 + \vec{e}_2x_2 + \vec{e}_3x_3, \tag{34}$$

при изоморфизме

$$\vec{e}_1 \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_2 \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{e}_3 \to \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Выше приведен только частные случай спинтензорного представления квадратичной формы (25), при более детальном рассмотрении $s^{(+---)2} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ является детерминантом всех нижеприведенных 2×2-матриц (эрмитовых спинтензоров):

(36)

$$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1-ix_2 \\ x_1+ix_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_3 & x_1+ix_2 \\ x_1-ix_2 & x_0+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_1-x_2 & -x_0+x_3 \\ x_0+x_3 & ix_1+x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0+x_1 & x_3+ix_2 \\ x_3-ix_2 & x_0-x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_1 & x_3-ix_2 \\ x_3+ix_2 & x_0+x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0+x_1 & x_3-ix_2 \\ x_3+ix_2 & x_0-x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_1 & x_3+ix_2 \\ x_3-ix_2 & x_0+x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_2-x_1 & -x_0+x_3 \\ x_0+x_3 & ix_2+x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0+x_2 & x_1+ix_3 \\ x_1-ix_3 & x_0-x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_2 & x_1-ix_3 \\ x_1+ix_3 & x_0+x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0+x_2 & x_1-ix_3 \\ x_1+ix_3 & x_0-x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_2 & x_1+ix_3 \\ x_1-ix_3 & x_0+x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_1-x_3 & -x_0+x_2 \\ x_0+x_2 & ix_1+x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_2+ix_1 \\ x_2-ix_1 & x_0-x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_3 & x_2-ix_1 \\ x_2+ix_1 & x_0+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_2-ix_1 \\ x_2+ix_1 & x_0-x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_3 & x_2+ix_1 \\ x_2-ix_1 & x_0+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_3-x_2 & -x_0+x_1 \\ x_0+x_1 & ix_3+x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0+x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & x_0-x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_1 & x_2-ix_3 \\ x_2+ix_3 & x_0+x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0+x_1 & x_2-ix_3 \\ x_2+ix_3 & x_0-x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_1 & x_2+ix_3 \\ x_2-ix_3 & x_0+x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_2-x_3 & -x_0+x_1 \\ x_0+x_1 & ix_2+x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_0+x_2 & x_3+ix_1 \\ x_3-ix_1 & x_0-x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_2 & x_3-ix_1 \\ x_3+ix_1 & x_0+x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0+x_2 & x_3-ix_1 \\ x_3+ix_1 & x_0-x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0-x_2 & x_3+ix_1 \\ x_3-ix_1 & x_0+x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_3-x_1 & -x_0+x_2 \\ x_0+x_2 & ix_3+x_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ix_2-x_1 & -x_0+x_3 \\ x_0+x_3 & ix_2+x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_2-x_1 & x_0+x_3 \\ -x_0+x_3 & ix_2+x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_1-x_3 & x_0+x_2 \\ -x_0+x_2 & ix_1+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_2-x_3 & x_0+x_1 \\ -x_0+x_1 & ix_2+x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix_3-x_1 & x_0+x_2 \\ -x_0+x_2 & ix_3+x_1 \end{pmatrix}$$

Реализоваться может каждая из 2×2-матриц (30) с вероятностью 1/(их общее количество). Поэтому аффинор (27) носит статистический характер, то есть, данный аффинор постоянно хаотически меняется при случайном переходе от одной эрмитового спинтензора (30) к другому. При этом полный набор спинтезоров (30) образуют группу.

Аналогично, каждая квадратичная форма с соответствующей сигнатурой (1):

$$
\begin{array}{ll}
ds^{(++++)2} = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(----)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 \\
ds^{(---+)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(+++-)2} = dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
ds^{(+--+)2} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 & ds^{(-+++)2} = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 \\
ds^{(--+-)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(++-+)2} = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(-+--)2} = -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(+-++)2} = dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(+-+-)2} = dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(-++-)2} = -dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(++--)2} = dx_0^2 + dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(--++)2} = -dx_0^2 - dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 \\
ds^{(+---)2} = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 & ds^{(-+++)2} = -dx_0^2 + d x_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2
\end{array}
\qquad (37)
$$

может быть представлена в виде спинтензора или A_4-матрицы (аффинора), которые показаны в табл. 1:

Таблица 1: Спинтензоры и A_4-матрицы с различными сигнатурами

1	$\begin{pmatrix} x_0+ix_3 & ix_1+x_2 \\ ix_1-x_2 & x_0-ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0; \quad sign(++++)$ $\begin{pmatrix} x_0+ix_3 & ix_1+x_2 \\ ix_1-x_2 & x_0-ix_3 \end{pmatrix} = x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(++++)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(++++)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(++++)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(++++)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$
2	$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & ix_1+x_2 \\ ix_1-x_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0; \quad sign(+++-)$ $\begin{pmatrix} x_0+x_3 & ix_1+x_2 \\ ix_1-x_2 & x_0-x_3 \end{pmatrix} = x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(+++-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(+++-)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(+++-)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(+++-)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
3	$\begin{pmatrix} x_0+ix_3 & ix_1+x_2 \\ ix_1-x_2 & -x_0+ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2=0; \quad sign(-+++)$ $\begin{pmatrix} x_0+ix_3 & ix_1+x_2 \\ ix_1-x_2 & -x_0+ix_3 \end{pmatrix} = -x_0\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(-+++)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1^{(-+++)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2^{(-+++)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3^{(-+++)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$

4	$\begin{pmatrix} x_0+ix_3 & x_1+x_2 \\ -x_1+x_2 & x_0-ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2+x_1^2-x_2^2+x_3^2=0; \quad sign(++-+)$ $\begin{pmatrix} x_0+ix_3 & x_1+x_2 \\ -x_1+x_2 & x_0-ix_3 \end{pmatrix} = x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(+++-)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \sigma_1^{(+++-)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_2^{(+++-)}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_3^{(+++-)}=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$
5	$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & ix_1+x_2 \\ -ix_1+x_2 & -x_0+x_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2-x_1^2-x_2^2+x_3^2=0; \quad sign(---+)$ $\begin{pmatrix} x_0+x_3 & ix_1+x_2 \\ -ix_1+x_2 & -x_0+x_3 \end{pmatrix} = -x_0\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(---+)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1^{(---+)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2^{(---+)}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3^{(---+)}=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$
6	$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & ix_1+x_2 \\ ix_1-x_2 & -x_0+x_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2=0; \quad sign(-+++)$ $\begin{pmatrix} x_0+x_3 & ix_1+x_2 \\ ix_1-x_2 & -x_0+x_3 \end{pmatrix} = -x_0\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(-+++)}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1^{(-+++)}=\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2^{(-+++)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3^{(-+++)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$ - это матрицы Кэли.
7	$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+x_2 \\ x_1-x_2 & -x_0+x_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2-x_1^2+x_2^2+x_3^2=0; \quad sign(--++)$ $\begin{pmatrix} x_0+x_3 & x_1+x_2 \\ x_1-x_2 & -x_0+x_3 \end{pmatrix} = -x_0\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(--++)}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\ \sigma_1^{(--++)}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_2^{(--++)}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};\ \sigma_3^{(--++)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$
8	$\begin{pmatrix} x_0+x_3 & -x_1+x_2 \\ x_1+x_2 & -x_0+x_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2+x_1^2-x_2^2+x_3^2=0; \quad sign(-+-+)$ $\begin{pmatrix} x_0+x_3 & -x_1+x_2 \\ x_1+x_2 & -x_0+x_3 \end{pmatrix} = -x_0\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(-+-+)}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1^{(-+-+)}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2^{(-+-+)}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3^{(-+-+)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

9	$\begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad sign(+--+)$ $\begin{pmatrix} x_0 - ix_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(+--+)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1^{(+--+)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2^{(+--+)} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}; \ \sigma_3^{(+--+)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$
10	$\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad sign(++--)$ $\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(++--)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1^{(++--)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2^{(++--)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3^{(++--)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$
11	$\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}_{\det} = \begin{vmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{vmatrix} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad sign(+---)$ $\begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(+---)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(+---)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(+---)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
12	$\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0; \quad sign(+-++)$ $\begin{pmatrix} x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 - ix_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(+-++)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1^{(+-++)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2^{(+-++)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3^{(+-++)} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$
13	$\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0; \quad sign(--+-)$ $\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix} = -x_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(--+-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \sigma_1^{(--+-)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2^{(--+-)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3^{(--+-)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$

14	$\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}_{\det} = x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;\qquad sign(+\,-+\,-)$ $\begin{pmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix} = x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - x_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(+\,-+\,-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1^{(+\,-+\,-)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2^{(+\,-+\,-)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3^{(+\,-+\,-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$
15	$\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0;\qquad sign(-+\,--)$ $\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix} = -x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_3\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(-+\,--)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \sigma_1^{(-+\,--)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2^{(-+\,--)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3^{(-+\,--)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$
16	$\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix}_{\det} = -x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0;\qquad sign(---\,-)$ $\begin{pmatrix} -x_0 + ix_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + ix_3 \end{pmatrix} = -x_0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - x_1\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - x_2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - x_3\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix};$ *где* $\sigma_0^{(---\,-)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \sigma_1^{(---\,-)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2^{(---\,-)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3^{(---\,-)} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$

Каждой A_4-матрице (аффинору) из табл. 1 ставится в соответствие «цветной» кватернион с соответствующей сигнатурой, где в качестве мнимых единиц используются объекты

$$\vec{e}_1 \to \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 \to \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 \to \sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_4 \to \sigma_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

$$\vec{e}_5 \to \sigma_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_6 \to \sigma_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_7 \to \sigma_7 = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_8 \to \sigma_8 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_9 \to \sigma_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_{10} \to \sigma_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_{11} \to \sigma_{11} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_{12} \to \sigma_{12} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_{13} \to \sigma_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_{14} \to \sigma_{14} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_{15} \to \sigma_{15} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_{16} \to \sigma_{16} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

где σ_{ij} спиновые матрицы Паули-Кэли, которые являются образующими алгебры Клиффорда, и удовлетворяют условиям

$$\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{при } i \neq j; \\ 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{при } i = j. \end{cases} \tag{39}$$

Еще раз отметим, что в табл. 1 приведены только частные случаи спинтензорных представлений квадратичных форм (31), подобно полному набору 2×2-матриц (эрмитовых спинтензоров) (36) для одной квадратичной формы) $s^{(+\,---)2} = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ с сигнатурой $(+\,---)$.

Для наглядности все типы A_4-матриц (т.е., аффиноров) и все сорта «цветных» кватернионов сведены в табл. 2.

Таблица 2: Квадратичные формы, A_4-матрицы и «цветные» кватернионы

Квадратичная форма	A_4-матрица (т.е., аффинор)	«Цветной» кватернион	Сигнатура
$ds_1^2=x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$	$x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$z_1=x_0+ix_1+jx_2+kx_3$	$\{++++\}$
$ds_2^2=x_0^2-x_1^2-x_2^2+x_3^2$	$x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$	$z_2=x_0-ix_1-jx_2+kx_3$	$\{+--+\}$
$ds_3^2=x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2$	$x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-x_3\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$z_3=x_0+ix_1+jx_2-kx_3$	$\{+++-\}$
$ds_4^2=x_0^2+x_1^2-x_2^2-x_3^2$	$x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}-x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$z_4=x_0+ix_1-jx_2-kx_3$	$\{++--\}$
$ds_5^2=-x_0^2+x_1^2+x_2^2-x_3^2$	$-x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-x_3\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$z_5=-x_0+ix_1+jx_2-kx_3$	$\{-++-\}$
$ds_6^2=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$	$x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$z_6=x_0-ix_1-jx_2-kx_3$	$\{+---\}$
$ds_7^2=x_0^2+x_1^2-x_2^2+x_3^2$	$x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$z_7=x_0+ix_1-jx_2+kx_3$	$\{++-+\}$
$ds_8^2=x_0^2-x_1^2+x_2^2+x_3^2$	$x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$z_8=x_0-ix_1+jx_2+kx_3$	$\{+-++\}$
$ds_9^2=-x_0^2-x_1^2-x_2^2+x_3^2$	$-x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$z_9=-x_0-ix_1-jx_2+kx_3$	$\{---+\}$
$ds_{10}^2=-x_0^2-x_1^2+x_2^2-x_3^2$	$-x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-x_3\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$z_{10}=-x_0-ix_1+jx_2-kx_3$	$\{--+-\}$
$ds_{11}^2=-x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$	$-x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$z_{11}=-x_0+ix_1+jx_2+kx_3$	$\{-+++\}$
$ds_{12}^2=x_0^2-x_1^2+x_2^2-x_3^2$	$x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$z_{12}=x_0-ix_1+jx_2-kx_3$	$\{+-+-\}$
$ds_{13}^2=-x_0^2-x_1^2+x_2^2+x_3^2$	$-x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$z_{13}=-x_0-ix_1+jx_2+kx_3$	$\{--++\}$
$ds_{14}^2=x_0^2-x_1^2+x_2^2+x_3^2$	$-x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}-x_3\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$z_{14}=-x_0+ix_1+jx_2+kx_3$	$\{-+-+\}$
$ds_{15}^2=-x_0^2+x_1^2-x_2^2+x_3^2$	$-x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}-x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$z_{15}=-x_0+ix_1-jx_2-kx_3$	$\{-+--\}$
$ds_{16}^2=-x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$	$-x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}-x_1\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}-x_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}-x_3\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}$	$z_{16}=-x_0-ix_1-jx_2-kx_3$	$\{----\}$

Один из вариантов состояния локального участка пространственной ткани определяется суперпозицией (т.е., переплетением) 16-ти «цветных» нитей, заданных аффинорами из табл. 2, при условии соблюдения вакуумного баланса (т.е. равенства нулю):

$$
\begin{aligned}
&x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}i&0\\0&i\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-i&0\\0&-i\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}+\\
&+x_0\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+
\end{aligned}
\qquad (40)
$$

$$+x_0\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+$$
$$+x_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+$$
$$+x_0\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}+$$
$$+x_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+$$
$$+x_0\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+x_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Прямым вычислением легко убедиться, что сумма всех 16-и типов «цветных» кватернионов из табл. 2 также равна нулю

$$\sum_{k=1}^{16} z_k = 0. \tag{41}$$

В результате сложение (или усреднение) всех типов «цветных» кватернионов сбалансировано относительно нуля, т.е. удовлетворяет условию «вакуумного баланса».

7 Использование спинтензоров с различными сигнатурами

Для примера рассмотрим два случая с использованием спинтензоров.

Пример 1 Пусть заданы матрица-столбец и эрмитовосопряженная ей матрица-строка

$$\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix},\ \left(s_1^*, s_2^*\right), \tag{42}$$

которые описывают состояние спинора.

Проекции спина на оси координат для случая, когда метрическое 4-пространство имеет сигнатуру (+ – – –) могут быть определены с помощью спинтензора (32) и A_4-матрицам (аффинора) (33)

$$(s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix}x_0+x_3 & x_1+ix_2\\ x_1-ix_2 & x_0-x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix} = \tag{43}$$

$$= x_0(s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix} - x_1(s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix} - x_2(s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix} - x_3(s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix} =$$

$$= (s_1^* s_1 + s_2^* s_2)x_0 - (-s_2^* s_1 - s_2^* s_1)x_1 - (is_2^* s_1 - is_1^* s_2)x_2 - (-s_1^* s_1 + s_2^* s_2)x_3.$$

Пример 2 Пусть прямая и обратная волны описывается выражениями

$$\vec{\tilde{E}}_1^{(+)} = \tilde{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \tag{44}$$
$$\vec{\tilde{E}}_2^{(-)} = \tilde{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \tag{45}$$

где a_+ и a_- – амплитуды прямой и обратной волны. В общем случае это комплексные числа:

$$\tilde{a}_+ = a_+ e^{i\phi_+},\quad \tilde{a}_- = a_- e^{-i\phi_-},\quad \tilde{a}_+^* = a_+ e^{-i\phi_+},\quad \tilde{a}_-^* = a_- e^{i\phi_-}, \tag{46}$$

содержащие информацию о фазах волн φ_+ и φ_- .

Взаимно противоположные волны (44) и (45) можно представить в виде двухкомпонентного спинора:

$$\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\end{pmatrix} = |\psi\rangle = \begin{pmatrix}\tilde{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}\\ \tilde{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}\end{pmatrix} \tag{47}$$

и эрмитовосопряженного ему спинора

$$(s_1^*, s_2^*) = |\psi\rangle^+ = \langle\psi| = \left(\tilde{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)},\quad \tilde{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}\right). \tag{48}$$

Условие нормировки в данном случае выражается равенством

$$(s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \langle\psi|\psi\rangle = \left(\bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \quad \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}\right)\begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = |\bar{a}_+|^2 + |\bar{a}_-|^2. \tag{49}$$

Для нахождения проекций спина (круговой поляризации) луча света на оси координат воспользуемся спинтензором

$$A_3 = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{50}$$

который связан с 3-мерной метрикой

$$det(A_3) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 - ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}_{det} = \begin{vmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{vmatrix} = -(x_1^2 + x_1^2 + x_1^2) \tag{51}$$

с сигнатурой (– – –).

Полагая в выражении (50) $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, рассмотрим проекции спина на оси координат

$$(s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + (s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (s_2^* s_1 + s_2^* s_1) + (-is_2^* s_1 + is_1^* s_2) + (s_1^* s_1 - s_2^* s_2). \tag{52}$$

Подставляя в это выражение спиноры (47) и (48), получим три следующие проекции спина на соответствующие координатные оси $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$:

$$\langle s_x\rangle = \langle\psi|-\sigma_1|\psi\rangle = (s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \quad \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = \bar{a}_-^* \bar{a}_+ e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} + \bar{a}_+^* \bar{a}_- e^{i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)}; \tag{53}$$

$$\langle s_y\rangle = \langle\psi|-\sigma_2|\psi\rangle = (s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \quad \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}\right)\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} =$$

$$= \bar{a}_-^* \bar{a}_+ e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} + \bar{a}_+^* \bar{a}_- e^{i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} = i\left[\bar{a}_+^* \bar{a}_- e^{i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)} - \bar{a}_-^* \bar{a}_+ e^{-i\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)}\right]; \tag{54}$$

$$\langle s_z\rangle = \langle\psi|-\sigma_3|\psi\rangle = (s_1^*, s_2^*)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\bar{a}_+^* e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}, \quad \bar{a}_-^* e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a}_+ e^{-i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \\ \bar{a}_- e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(ct-r)} \end{pmatrix} = |\bar{a}_+|^2 - |\bar{a}_-|^2. \tag{55}$$

В случае $\varphi_+ = \varphi_- = 0$ формулы (53) – (55) приобретают следующий упрощенный вид

$$\langle s_x\rangle = 2a_+ a_- \cos\left[\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)\right] = 2a_+ a_- \cos[2(\omega t - kr)], \tag{56}$$

$$\langle s_y\rangle = 2a_+ a_- \sin\left[\frac{4\pi}{\lambda}(ct-r)\right] = 2a_+ a_- \sin[2(\omega t - kr)],$$

$$\langle s_z\rangle = |a_+|^2 - |a_-|^2.$$

В случае равенства амплитуд прямой и обратной волн $a_+ = a_-$, вместо уравнений (56) получим следующие усредненные проекции спина

$$\langle s_x\rangle = 2a_+^2 \cos[2(\omega t - kr)], \tag{57}$$

$$\langle s_y\rangle = 2a_+^2 \sin[2(\omega t - kr)],$$

$$\langle s_z\rangle = 0.$$

Проекция спина (вращающегося вектора напряженности электрического поля) на направление распространения луча света *Z* неизменна и равна нулю. При этом его проекция на плоскость *XY*, перпендикулярную направлению распространения данного луча, вращается вокруг оси Z с угловой скоростью $\omega = 4\pi c/\lambda$. Таким образом, спинорное представление о распространении сопряженной пары волн приводит к описанию круговой поляризации без привлечения дополнительных гипотез.

Аналогично может быть выполнен анализ распространения волн в 3-мерной метрической протяженности с сигнатурами: (– – –), (+ – –), (– + –), (– – +), (+ + +), (– + +), (+ – +), (+ + –).

Приведенный здесь стигнатурно-спинтензорный математический аппарат удобен для решения ряда задач, связанных с многослойными внутри вакуумными вращательными процессами

8 В среднем плоская «цветная» пространственная ткань

Допустим, что состояние локального участка вакуума является проявлением усредненной суперпозиции 16-ти искривленных метрических пространств с различными сигнатурами (2)

$$\begin{aligned} ds_\Sigma{}^2 = 1/16\ (&ds^{(+---)2} + ds^{(++++)2} + ds^{(---+)2} + ds^{(+--+)2} + \\ &+ ds^{(--+-)2} + ds^{(++--)2} + ds^{(-+--)2} + ds^{(+-+-)2} + \\ &+ ds^{(-+++)2} + ds^{(----)2} + ds^{(+++-)2} + ds^{(-++-)2} + \\ &+ ds^{(++-+)2} + ds^{(--++)2} + ds^{(+-++)2} + ds^{(-+-+)2}), \end{aligned} \tag{58}$$

где

$ds^{(++++)2} = g_{00}^{(1)} dx_0{}^2 + g_{11}^{(1)} dx_1{}^2 + g_{22}^{(1)} dx_2{}^2 + g_{33}^{(1)} dx_3{}^2$

$ds^{(---+)2} = -g_{00}^{(2)} dx_0{}^2 - g_{11}^{(2)} dx_1{}^2 - g_{22}^{(2)} dx_2{}^2 + g_{33}^{(2)} dx_3{}^2$

$ds^{(+--+)2} = g_{00}^{(3)} dx_0{}^2 - g_{11}^{(3)} dx_1{}^2 - g_{22}^{(3)} dx_2{}^2 + g_{33}^{(3)} dx_3{}^2$

$ds^{(--+-)2} = -g_{00}^{(4)} dx_0{}^2 - g_{11}^{(4)} dx_1{}^2 + g_{22}^{(4)} dx_2{}^2 - g_{33}^{(4)} dx_3{}^2$

$ds^{(-+--)2} = -g_{00}^{(5)} dx_0{}^2 + g_{11}^{(5)} dx_1{}^2 - g_{22}^{(5)} dx_2{}^2 - g_{33}^{(5)} dx_3{}^2$

$ds^{(+-+-)2} = g_{00}^{(6)} dx_0{}^2 - g_{11}^{(6)} dx_1{}^2 + g_{22}^{(6)} dx_2{}^2 - g_{33}^{(6)} dx_3{}^2$

$ds^{(++--)2} = g_{00}^{(7)} dx_0{}^2 + g_{11}^{(7)} dx_1{}^2 - g_{22}^{(7)} dx_2{}^2 - g_{33}^{(7)} dx_3{}^2$

$ds^{(+---)2} = g_{00}^{(8)} dx_0{}^2 - g_{11}^{(8)} dx_1{}^2 - g_{22}^{(8)} dx_2{}^2 - g_{33}^{(8)} dx_3{}^2$

$ds^{(----)2} = -g_{00}^{(9)} dx_0{}^2 - g_{11}^{(9)} dx_1{}^2 - g_{22}^{(9)} dx_2{}^2 - g_{33}^{(9)} dx_3{}^2$

$ds^{(+++-)2} = g_{00}^{(10)} dx_0{}^2 + g_{11}^{(10)} dx_1{}^2 + g_{22}^{(10)} dx_2{}^2 - g_{33}^{(10)} dx_3{}^2$

$ds^{(-++-)2} = -g_{00}^{(11)} dx_0{}^2 + g_{11}^{(11)} dx_1{}^2 + g_{22}^{(11)} dx_2{}^2 - g_{33}^{(11)} dx_3{}^2$

$ds^{(++-+)2} = g_{00}^{(12)} dx_0{}^2 + g_{11}^{(12)} dx_1{}^2 - g_{22}^{(12)} dx_2{}^2 + g_{33}^{(12)} dx_3{}^2$

$ds^{(+-++)2} = g_{00}^{(13)} dx_0{}^2 - g_{11}^{(13)} dx_1{}^2 + g_{22}^{(13)} dx_2{}^2 + g_{33}^{(13)} dx_3{}^2$

$ds^{(-+-+)2} = -g_{00}^{(14)} dx_0{}^2 + g_{11}^{(14)} dx_1{}^2 - g_{22}^{(14)} dx_2{}^2 + g_{33}^{(14)} dx_3{}^2$

$ds^{(--++)2} = -g_{00}^{(15)} dx_0{}^2 - g_{11}^{(15)} dx_1{}^2 + g_{22}^{(15)} dx_2{}^2 + g_{33}^{(15)} dx_3{}^2$

$ds^{(-+++)2} = -g_{00}^{(16)} dx_0{}^2 + g_{11}^{(16)} d\,x_1{}^2 + g_{22}^{(16)} dx_2{}^2 + g_{33}^{(16)} dx_3{}^2$

где $g_{ij}^{(n)} = g_{ij}^{(n)}(t)$ – диагональные компоненты метрического тензора *n*-го метрического пространства с соответствующей сигнатурой (т.е. топологией). Данные компоненты определяют кривизну *n*-го метрического пространства и являются случайными функциями времени *t*.

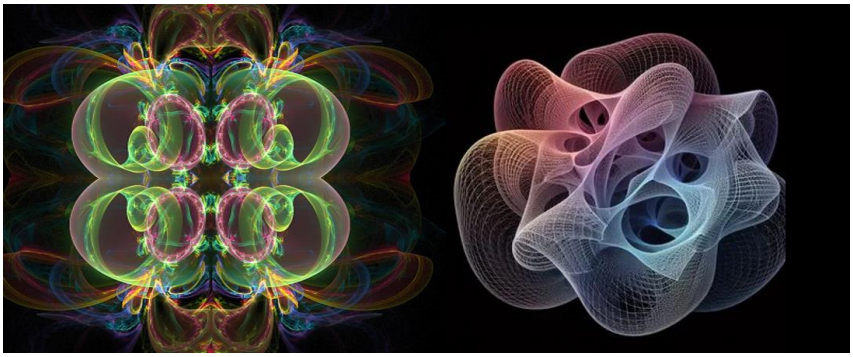
В этом случае хаотически флуктуирующая, но в среднем исчезающая «цветная» пространственная ткань сплетается из кривых нитей, изменяющихся случайным образом. Частный случай переплетения данных «цветных» нитей (линий) может быть описано усредненной суперпозицией искривленных аффиноров

$$\begin{aligned} ds_{(16)} = \frac{1}{\sqrt{16}}\Bigg[&\sqrt{g_{00}^{(1)}(t)}dx_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{11}^{(1)}(t)}dx_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{22}^{(1)}(t)}dx_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{33}^{(1)}(t)}dx_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \\ &+ \sqrt{g_{00}^{(2)}(t)}dx_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{11}^{(2)}(t)}dx_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{22}^{(2)}(t)}dx_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{33}^{(2)}(t)}dx_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \\ &+ \sqrt{g_{00}^{(3)}(t)}dx_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{11}^{(3)}(t)}dx_1 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{22}^{(3)}(t)}dx_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{33}^{(3)}(t)}dx_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\ &+ \sqrt{g_{00}^{(4)}(t)}dx_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{11}^{(4)}(t)}x_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{22}^{(4)}(t)}x_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{33}^{(4)}(t)}x_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \sqrt{g_{00}^{(5)}(t)}dx_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{11}^{(5)}(t)}dx_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{22}^{(5)}(t)}dx_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{33}^{(5)}(t)}dx_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + \\ &+ \sqrt{g_{00}^{(6)}(t)}dx_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{11}^{(6)}(t)}dx_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{22}^{(6)}(t)}dx_2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{33}^{(6)}(t)}dx_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\ &+ \sqrt{g_{00}^{(7)}(t)}dx_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{11}^{(7)}(t)}dx_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{22}^{(7)}(t)}dx_2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{33}^{(7)}(t)}dx_3 \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \\ &+ \sqrt{g_{00}^{(8)}(t)}dx_0 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{11}^{(8)}(t)}dx_1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{22}^{(8)}(t)}dx_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \sqrt{g_{33}^{(8)}(t)}dx_3 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \end{aligned} \tag{59}$$

$$+\sqrt{g_{00}^{(9)}(t)}dx_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\sqrt{g_{11}^{(9)}(t)}dx_1\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{22}^{(9)}(t)}dx_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{33}^{(9)}(t)}dx_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+$$
$$+\sqrt{g_{00}^{(10)}(t)}dx_0\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\sqrt{g_{11}^{(10)}(t)}dx_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{22}^{(10)}(t)}dx_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{33}^{(10)}(t)}dx_3\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}+$$
$$+\sqrt{g_{00}^{(11)}(t)}dx_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\sqrt{g_{11}^{(11)}(t)}dx_1\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{22}^{(11)}(t)}dx_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{33}^{(11)}(t)}dx_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+$$
$$+\sqrt{g_{00}^{(12)}(t)}dx_0\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\sqrt{g_{11}^{(12)}(t)}dx_1\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{22}^{(12)}(t)}dx_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{33}^{(12)}(t)}dx_3\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+$$
$$+\sqrt{g_{00}^{(13)}(t)}dx_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\sqrt{g_{11}^{(13)}(t)}dx_1\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{22}^{(13)}(t)}dx_2\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{33}^{(13)}(t)}dx_3\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+$$
$$+\sqrt{g_{00}^{(14)}(t)}dx_0\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\sqrt{g_{11}^{(14)}(t)}dx_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{22}^{(14)}(t)}dx_2\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{33}^{(14)}(t)}dx_3\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}+$$
$$+\sqrt{g_{00}^{(15)}(t)}dx_0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\sqrt{g_{00}^{(15)}(t)}dx_1\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{00}^{(15)}(t)}dx_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{00}^{(15)}(t)}dx_3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+$$
$$+\sqrt{g_{00}^{(16)}(t)}dx_0\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\sqrt{g_{11}^{(16)}(t)}dx_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{22}^{(16)}(t)}dx_2\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}+\sqrt{g_{33}^{(16)}(t)}dx_3\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}\Big]=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Такая в среднем отсутствующая «цветная» пространственная ткань (рис. 4) является в среднем Риччи-плоской ($R_{ij}=0$). В окрестности каждой точки такой ткани имеется хаотически изменяющийся топологический узел (58) с усредненной сигнатурой (8), который во многом соответствует постоянно хаотически изменяющемуся многообразию Калаби-Яу (рис. 5)

Рис. 4: Иллюстрация пространственной ткани, сотканной из 16-ти типов «цветных» нитей (т.е. переплетенных «цветных» линий из 16-ти пересекающихся метрических пространств (58) с сигнатурами (2))



а) б)

Рис. 5: Иллюстрация сравнения мгновенного состояния локального топологического узла, сотканного из «цветных» нитей Алгебры сигнатур и одной из реализаций компактного многообразия Калаби-Яу теории суперструн

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

«ВСЕВЫШНИЙ Сотворил мир 32-мя чудесными путями … »
"Сефер ha-Йецира" (Книга Творения)

В этой статье предложено к рассмотрению многомерное пространство (многообразие), которое является результатом аддитивного наложения (т.е., суперпозиции) 16-ти метрических пространств (1) с сигнатурами (т.е., топологиями) (2). Более подробно данное многомерное пространство рассмотрено в Алгебре сигнатур [1,2,3,4].

Компактификация дополнительных измерений в таком многомерном пространстве происходит автоматически (т.е. без дополнительных условий), так как сумма всех знаков (определяющих направление осей координат) равна расщепленному нулю (8), в котором 32(+) – 32(–) = 0.

В месте с тем из такого многомерного многообразия может быть одновременно выявлено пространство Минковского с сигнатурой (+ – – –) и антипространство Минковского с противоположной сигнатурой (– + + +) (смотрите выражения (14) и (15)). Поэтому одним из основополагающих выводов Алгебры сигнатур [1,2,3,4,5,6] является необходимость считать, что окружающее нас пространство это 3-мерная ткань, сплетенная из как минимум из 4-х взаимно перпендикулярных линий («нитей») (рис. 2*в*).

В рамках Алгебры сигнатур, на более глубинном уровне рассмотрения пространственная ткань является результатом переплетения уже 32-х нитей (16 «цветных» +16 «антицветных» = 32).

В окрестности любой локальной области пространственной ткани 32 «цветные» нити могут переплетаться в такие переливающиеся со временем топологические узлы, что в среднем они формируют локальный участок плоского пространства с тензором Риччи равным нулю ($R_{ij} = 0$). В этом случае локальные переменчивые топологические узлы Алгебры сигнатур являются аналогом постоянно изменяющегося компактного многообразия Калаби-Яу в теории суперструн (рис. 5).

Многомерная геометрия и топология Алгебры сигнатур настолько оснащена дополнительными возможностями, что на основании этой изящной математики удается построить метрико-динамические (т.е. полностью геометризированные) модели всех частиц (бозонов, фермионов, адронов и мезонов), входящих в состав Стандартной Модели элементарных частиц [5,6,7,8]. Так же удается предложить метрико-динамические (т.е. геометрические) пути решения таких проблем современной науки как барионная асимметрия Вселенной [6], объяснение природы заряда частиц [7] и их инерции (т.е. массы) [8], обозначить пути преодоления гравитации [11] и т.д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Батанов-Гаухман М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть I. Алгебра стигнатур. Препринт https://doi.org/10.24108/preprints-3113027 Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part I. Algebra of Stignatures. Avances en Ciencias e Ingeniería, 14 (1), 1-26, https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-1-ano-2023-articulo-1/ ; and Preprints, 2023060765. https://doi.org/10.20944/preprints202306.0765.v3, or viXra:2403.0035.

[2] Батанов-Гаухман М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть II. Алгебра сигнатур. Preprints.ru. https://doi.org/10.24108/preprints-3113028. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2023).Geometrized Vacuum Physics. Part II. Algebra of Signatures. Avances en Ciencias e Ingeniería, 14 (1), 27-55, https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-1-ano-2023-articulo-2/: and Preprints, 2023070716, https://doi.org/10.20944/preprints202307.0716.v1, or viXra:2403.0034.

[3] Батанов-Гаухман М. (2023) Геометризованная физика вакуума. Часть III. Искривленная область вакуума. Preprints.ru. https://doi.org/10.24108/preprints-3113032. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2023). Geometrized Vacuum Physics. Part III. Curved Vacuum Area. Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 14 nro 2 año 2023 Articulo 5, https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-2-ano-2023-articulo-5/; and Preprints 2023, 2023080570. https://doi.org/10.20944/preprints202308.0570.v4, or viXra:2403.0033.

[4] Батанов-Гаухман М. (2024) Геометризованная физика вакуума. Часть IV. Динамика вакуумных слоев. Preprints.ru. https://doi.org/10.24108/preprints-3113039. Available in English: Batanov-Gaukhman, M., (2024). Geometrized Vacuum Physics. Part IV: Dynamics of Vacuum Layers. Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 14 nro 3 año 2023 Articulo 1 https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-3-ano-2023-articulo-1/, and Preprints.org. https://doi.org/10.20944/preprints202310.1244.v3, or viXra:2403.0032.

[5] Батанов-Гаухман М. (2024) Геометризированная физика вакуума. Часть 5: Стабильные вакуумные образования. Preprints.ru. https://doi.org/10.24108/preprints-3113040 . Available in English: Batanov-Gaukhman, M., (2024). Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 14 nro 3 año 2023 Articulo 2 https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-3-ano-2023-articulo-2/, or viXra:2405.0002.

[6] Батанов-Гаухман М.(2024) Геометризированная физика вакуума. Часть 6: Иерархическая космологическая модель. PREPRINTS.RU https://doi.org/10.24108/preprints-3113086. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2024) Geometrized Vacuum Physics Part 6: Hierarchical Cosmological Model, Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 14 nro 4 año 2023 https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-14-nro-4-ano-2023-articulo-3/ or viXra:2408.0010.

[7] Батанов-Гаухман М. С. (2025) Геометризированная физика вакуума. Часть 7: «электрон» и «позитрон». PREPRINTS.RU, https://doi.org/10.24108/preprints-3113132. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2025). Geometrized Vacuum Physics Part VII: "Electron" and "Positron", Avances en Cien-cias e Ingeniería Vol. 15 nro 1 año 2024 Articulo 3, https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-15-nro-1-ano-2024-articulo-3/, or viXra:2409.0097.

[8] Батанов-Гаухман М. С. (2025) Геометризированная физика вакуума. Часть 8: инерционный электромагнетизм движущихся «частиц». Preprints.ru. Https://doi.org/10.24108/preprints-3113170. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2025) Geometrized Vacuum Physics. Part VIII: Inertial Electromagnetism of Moving «Particles»//Advances en Ciencias e Ingeniería Vol. 15 nro 2 año 2024 Articulo 1, https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-15-nro-2-ano-2024-articulo-1/, or viXra:2411.0086.

[9] Батанов-Гаухман М. С. (2025). Геометризированная физика вакуума. часть 9: «Нейтрино». Preprints.Ru. Https://doi.org/10.24108/preprints-3113337. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2025) Geometrized Vauum Physics. Part IX: «Neutrino»//Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 15 nro 3 año 2024 Articulo 1, https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-15-nro-3-ano-2024-articulo-1/ or viXra:2501.0059

[10] Батанов-Гаухман М. С. (2025). Геометризированная физика вакуума. часть 10: «Планеты» и «звезды». Preprints.ru. https://doi.org/10.24108/preprints-3113413. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2025) Geometrized Vac-uum Physics. Part X: Naked «Planets» and «Stars»// Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 15 nro 3 año 2024 Articulo 2, https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-15-nro-3-ano-2024-articulo-2/, or viXra:2502.0139.

[11] Батанов-Гаухман М. С. (2025). Геометризированная физика вакуума. часть 11: Гравитация и Левитация. Preprints.ru. https://doi.org/10.24108/preprints-3113413. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2025) Geometrized Vacuum Physics. Part XI: Gravity And Levitation. Avances en Ciencias e Ingeniería Vol. 15 nro 4 año 2024 Articulo 1. Publicada el agosto 7, 2025.https://www.executivebs.org/publishing.cl/avances-en-ciencias-e-ingenieria-vol-15-nro-4-ano-2024-articulo-1/, or viXra:2504.0180.

[12] Батанов-Гаухман М. С. (2025). Геометризированная физика вакуума. Часть 12: голые «галактики» – «частицы» темной материи? Preprints.ru, https://doi.org/10.24108/preprints-3113692. Available in English: Batanov-Gaukhman, M. (2025) Geometrized Vacuum Physics. Part 12: Naked "Galaxies" - "Particles" of Dark Matter? viXra:2508.0158.

[13] Batanov-Gaukhman M. (2024) Development of the Stochastic Interpretation of Quantum Mechanics by E. Nelson. Derivation of the Schrödinger-Euler-Poisson Equations. *Recent Progress in Materials* **2024**; 6(2): 014; 10.21926/rpm.2402014, or arXiv:2011.09901v10. Доступно на русском языке: Батанов-Гаухман М. С. (2024). Вывод уравнений Шредингера на основании объединения принципов наименьшего действия и максимума энтропии. PREPRINTS.RU. https://doi.org/10.24108/preprints-3113016

[14] Кляйн, Ф. (2004) Неевклидова геометрия – Москва: Издательство URSS, с. 355, ISBN 5-354-00602-3 (Klein, F. (2004) Non-Euclidean geometry – Moscow: Editorial URSS, p.355, ISBN 5-354-00602-3.4)

[15] Rashevsky, P.K. (2006) The theory of spinors. – Moscow: Editorial URSS, p.110, ISBN 5-484-00348-2.

[16] Шипов Г.И. (1996) Теория физического вакуума. – М.: Наука, 1996. – 449 стр. ISBN 5-02-003682-X, (Shipov, G. (1998). A Theory of Physical Vacuum". Moscow ST-Center, Russia ISBN 5 7273-0011-8).